Semaine 21 (23/03–27/03) : Géométrie du plan et de l'espace

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après, et par la recherche des plans tangents horizontaux d'une surface S d'équation $z = \varphi(x, y)$ (méthode au choix) en précisant leurs positions relatives (S est localement au-dessus de son plan tangent, localement en-dessous ou bien S travers son plan tangent).

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles.

Notation La connaissance du cours et l'étude déterminent la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :
- énoncé su, plans tangents horizontaux déterminés et positions relatives correctes : note minimale de 13/20;
- énoncé non su, rien ne va dans l'étude : note maximale de 7/20;
- autre situation : note comprise entre 8 et 14.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Bases de géométrie affine

Équations de plan. Si $\mathscr{P}$ est le plan affine passant par A et :
- de base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, alors $M \in \mathscr{P}$ ssi $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM}] = 0$;
- de vecteur normal $\overrightarrow{n}$, alors $M \in \mathscr{P}$ ssi $\langle \overrightarrow{AM} | \overrightarrow{n} \rangle = 0$.

Intersection de deux plans. Soient deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$. Alors $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ s'intersectent en une droite $\mathscr{D}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ est non nul. Dans ce cas, $\mathscr{D}$ est dirigée par $\overrightarrow{\tau}$.

Équation de sphère. La sphère de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ a pour équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2$.

Distance d'un point à un plan. Si $\mathscr{P}$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$, $d(M, \mathscr{P}) = \frac{|\langle \overrightarrow{AM} | \overrightarrow{n} \rangle|}{\|\overrightarrow{n}\|}$. En particulier si $ax + by + cz + d = 0$ est une équation cartésienne de $\mathscr{P}$, $d(M, \mathscr{P}) = \frac{|ax_M + bx_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Distance d'un point à une droite. Si $\mathscr{D}$ est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, $d(M, \mathscr{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$.

Courbes et surfaces paramétrées

Point régulier d'une courbe paramétrée. On dit que le point $M_0 = M(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ de Γ paramétrée par $(I, \overrightarrow{f})$ de classe $\mathscr{C}^1$ est régulier si le vecteur $\overrightarrow{f}'(t_0)$ est non nul. Dans ce cas, Γ possède une tangente en M_0 dirigée par $\overrightarrow{f}'(t_0)$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(\lambda) = x_0 + \lambda f_x'(t_0), \\ y(\lambda) = y_0 + \lambda f_y'(t_0), \\ z(\lambda) = z_0 + \lambda f_z'(t_0), \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Courbes coordonnées d'une surface paramétrée. Soit S une surface paramétrée par $(U,\overrightarrow{f})$ de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $M_0 = M(u_0, v_0) \in S$. On appelle courbes coordonnées en M_0 les courbes paramétrées $u \mapsto \overrightarrow{f}(u, v_0)$ et $v \mapsto \overrightarrow{f}(u_0, v)$ tracées sur S.

Point régulier d'une surface paramétrée et plan tangent. Soit S une surface paramétrée de classe $\mathscr{C}^1$ et soit $M_0 = M(u_0, v_0) \in S$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0) fixé. On dit que le point M_0 est régulier si la famille $\left(\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{b_0}\right)$ est libre, où $\overrightarrow{a_0} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\overrightarrow{b_0} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$. Dans ce cas, S admet un plan tangent Π_0 en M_0 dont $(\overrightarrow{a_0}, \overrightarrow{b_0})$ forme une base et $\overrightarrow{c_0} = \overrightarrow{a_0} \wedge \overrightarrow{b_0}$ en est un vecteur normal.

Paramétrage d'une surface d'équation $z = \varphi(x, y)$. Si une surface S est le graphe d'une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une représentation paramétrique de S est :

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = \varphi(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

En conséquence, en tout point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de S, en posant $\overrightarrow{a_0} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1(\varphi)(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b_0} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2(\varphi)(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ on obtient $\overrightarrow{c_0} = \overrightarrow{a_0} \wedge \overrightarrow{b_0} = \begin{pmatrix} -\partial_1(\varphi)(x_0, y_0) \\ -\partial_2(\varphi)(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et la surface S est régulière en tout point.

Position relative d'une surface d'équation $z = \varphi(x, y)$ et de son plan tangent. Soit une surface S d'équation $z = \varphi(x, y)$, où $\varphi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, et soit Π_0 le plan tangent à S en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. En notant $\mathbb{H}$ la matrice hessienne de φ en (x_0, y_0), nous avons les points suivants.

— Si $\det(\mathbb{H}) > 0$ et $\mathrm{tr}(\mathbb{H}) > 0$, alors S est au-dessus de Π_0 au voisinage de M_0.

— Si $\det(\mathbb{H}) > 0$ et $\mathrm{tr}(\mathbb{H}) < 0$, alors S est en dessous de Π_0 au voisinage de M_0.

— Si $\det(\mathbb{H}) < 0$, alors S traverse Π_0 en M_0.

— Si $\det(\mathbb{H}) = 0$, on ne peut pas conclure.

Surfaces définies par une équation cartésienne

Point régulier d'une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ et plan tangent. Le point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ est dit régulier si $\overrightarrow{\nabla}(f)(M_0) \neq \overrightarrow{0}$. Dans ce cas, S admet un plan tangent Π_0 en M_0 dont $\overrightarrow{\nabla}(f)(M_0)$ est un vecteur normal et une équation cartésienne de Π_0 est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cdot(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0)\cdot(z - z_0) = 0.$$

Courbe définie comme l'intersection de deux surfaces. On considère deux surfaces S_1 et S_2 d'équations cartésiennes respectives $f_1(x, y, z) = 0$ et $f_2(x, y, z) = 0$. On suppose que $\Gamma = S_1 \cap S_2$ est une courbe gauche et on s'intéresse à un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de Γ. Sous les hypothèses suivantes :

— M_0 est régulier pour S_1 et S_2 ;

— $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{\nabla}(f_1)(M_0)$ et $\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{\nabla}(f_2)(M_0)$ vérifient $\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} \neq \overrightarrow{0}$;

le point M_0 est régulier pour Γ et la tangente à Γ en M_0 est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\tau}$.

Surfaces particulières

Surfaces réglées. Une surface S est dite réglée si en tout point de S passe une droite incluse dans S.
Si $(\mathscr{D}_t)_{t\in I}$ constitue une famille de génératrices de S et si, pour tout $t \in I$, la droite $\mathscr{D}_t$ passe par $A(t)$ et est dirigée par $\overrightarrow{u}(t)$, une représentation paramétrique de S est $(t,\lambda) \mapsto \overrightarrow{OM}(t,\lambda) = \overrightarrow{OA}(t) + \lambda \overrightarrow{u}(t)$, i.e.

$$S : \begin{cases} x(t,\lambda) = x_A(t) + \lambda u_x(t) \\ y(t,\lambda) = y_A(t) + \lambda u_y(t) \, , \quad (t,\lambda) \in I \times \mathbb{R}. \\ z(t,\lambda) = z_A(t) + \lambda u_z(t) \end{cases}$$

Surfaces de révolution. Une surface S est dite de révolution s'il existe une droite Δ telle que l'intersection de S avec tout plan orthogonal à Δ est soit vide, soit constitués de cercles centrées sur Δ. Dans le cas où Δ passe par O, si on note R_θ la matrice de la rotation d'angle θ autour de Δ et $t \mapsto \overrightarrow{OA}(t)$ une représentation paramétrique d'une méridienne Γ de S, une représentation paramétrique de S est $\overrightarrow{OM}(t,\theta) = R_\theta \cdot \overrightarrow{OA}(t)$.

Programme détaillé

Liste des exigibles

— savoir réduire une équation de degré 2 et tracer la conique associée ;
— pouvoir réduire le domaine d'étude d'une courbe paramétrée plane ou gauche ;
— pouvoir déterminer la tangente d'une courbe gauche en un point régulier ;
— pouvoir déterminer le plan tangent d'une surface en un point régulier ;
— pouvoir déterminer la nature de l'intersection d'une surface et d'un plan ;
— pouvoir déterminer la projection orthogonale d'une courbe sur un plan de coordonnées ;
— pouvoir expliciter des droites incluses dans une surface ;
— pouvoir établir un paramétrage ou une équation cartésienne d'une surface réglée ;
— pouvoir établir un paramétrage ou une équation cartésienne d'une surface de révolution.

Programme détaillé

Chapitre 9 : géométrie affine du plan (dont les coniques)

Chapitre 10 : courbes paramétrées planes (hors courbure, enveloppe et développée)

Chapitre 13 : géométrie dans l'espace (courbes gauches, surfaces)