

Panneau indicateur Éléments de réponse

a)

$$F = p \cdot S = p \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4}$$

AN :

$$F = 1000 \times \pi \times \frac{0,85^2}{4}$$

$$F \approx 10 \times 3 \times \frac{8,5^2}{4}$$

$$F \approx 10 \times 3 \times \frac{72}{4}$$

$$F \approx 10 \times 3 \times 18$$

$$F \approx 10 \times 54$$

$$F \approx 540 \text{ N}$$

b)

On détermine les actions mécaniques en A.

On isole la poutre

BAME :

- En A, action du bâti sur la poutre : $\{\mathcal{F}_{b\hat{a}ti \rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}_A$
- En B, action de $\vec{F}$ sur la poutre $\{\mathcal{F}_{\vec{F} \rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}_B$:

La poutre est en équilibre, on applique le PFS : $\{\mathcal{F}_{b\hat{a}ti \rightarrow P}\} + \{\mathcal{F}_{\vec{F} \rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$

$$\text{Avec } \{\mathcal{F}_{\vec{F} \rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F \cdot L \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}_A$$

$$\text{Car : } \overrightarrow{M_{A, \vec{F} \rightarrow P}} = \overrightarrow{M_{B, \vec{F} \rightarrow P}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_{\vec{F} \rightarrow P}} = \vec{0} + L \cdot \vec{x} \wedge (-F \cdot \vec{y}) = -F \cdot L \cdot \vec{z}$$

$$\text{On trouve alors : } \{\mathcal{F}_{b\hat{a}ti \rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F \cdot L \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}_A$$

On peut maintenant déterminer les composantes du torseur de cohésion le long de la poutre.

Un seul tronçon : $[AB]$, soit $\forall x \in]0, L[$

On isole la $\frac{1}{2}$ poutre de gauche

BAME :

- En A, action du bâti sur la poutre : $\{\mathcal{F}_{b\hat{a}t\rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F \cdot L \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
- En G, torseur de cohésion $\{\mathcal{T}_{coh\acute{e}sion}\} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

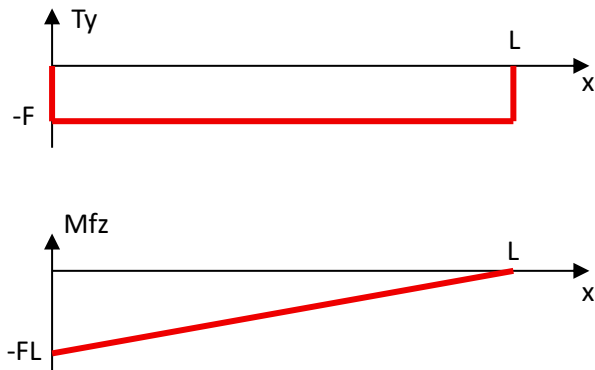
La $\frac{1}{2}$ poutre est en équilibre, on applique le PFS : $\{\mathcal{F}_{b\hat{a}t\rightarrow P}\} + \{\mathcal{T}_{coh\acute{e}sion}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_G$

$$\text{Avec : } \{\mathcal{F}_{b\hat{a}t\rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F \cdot L \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F \cdot L - F \cdot x \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\text{Car : } \overrightarrow{M_{G, b\hat{a}t\rightarrow P}} = \overrightarrow{M_{A, b\hat{a}t\rightarrow P}} + \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{R_{b\hat{a}t\rightarrow P}} = F \cdot L \cdot \vec{z} - x \cdot \vec{x} \wedge F \cdot \vec{y} = (F \cdot L - F \cdot x) \cdot \vec{z}$$

On trouve alors :

$$\forall x \in]0, L[, \begin{cases} T_y(x) = -F \\ M_{fz}(x) = F \cdot x - F \cdot L \end{cases}$$



c)

$$I_{Gz} = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{(b - 2 \cdot e) \cdot (h - 2 \cdot e)^3}{12}$$



On peut simplifier cette expression en considérant que $e \ll b$ et $e \ll h$

$$I_{Gz} = \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{e}{b}\right) \cdot h^3 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{e}{h}\right)^3}{12} \approx \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12} \left(1 - 2 \cdot \frac{e}{b}\right) \left(1 - 6 \cdot \frac{e}{h}\right)$$

$$I_{Gz} \approx \frac{b \cdot h^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12} \left(1 - 2 \cdot \frac{e}{b} - 6 \cdot \frac{e}{h}\right) \approx \frac{e \cdot h^3}{6} + \frac{b \cdot e \cdot h^2}{2}$$

$$I_{Gz} \approx e \cdot h^2 \left(\frac{h}{6} + \frac{b}{2}\right)$$

AN :

$$I_{Gz} = 3 \times 60^2 \times \left(\frac{60}{6} + \frac{120}{2}\right) = 3 \times 3600 \times 70 \approx 70 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Le calcul est plus délicat si les 3 barycentres ne sont pas confondus, cf. illustration_lgz_panneau.pdf

d)

Soit M un point de la poutre avec $\overrightarrow{AM} = x_M \cdot \vec{x} + y_M \cdot \vec{y} + z_M \cdot \vec{z}$

La contrainte en ce point M est donnée par la relation :

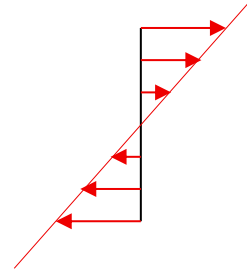
$$\sigma_M = -\frac{M_{fz}(x_M)}{I_{GZ}} \cdot y_M$$

$$\sigma_M = -\frac{F \cdot x_M - F \cdot L}{I_{GZ}} \cdot y_M$$

$$\sigma_M = \frac{F \cdot (L - x_M)}{I_{GZ}} \cdot y_M$$

La contrainte est maximale pour $x_M = 0$

Répartition de la contrainte normale dans la section d'abscisse $x=0$:



e)

Dans cette section la contrainte est maximale pour $y=h/2$

$$\sigma_{max} = \frac{F \cdot L}{I_{GZ}} \cdot \frac{h}{2}$$

AN :

$$\sigma_{max} = \frac{568 \times 2400}{66,4 \cdot 10^4} \times \frac{60}{2}$$

$$\sigma_{max} \approx \frac{568}{66,4 \times 4} \times \frac{60}{2}$$

$$\sigma_{max} \approx \frac{500}{1 \times 4} \times \frac{1}{2}$$

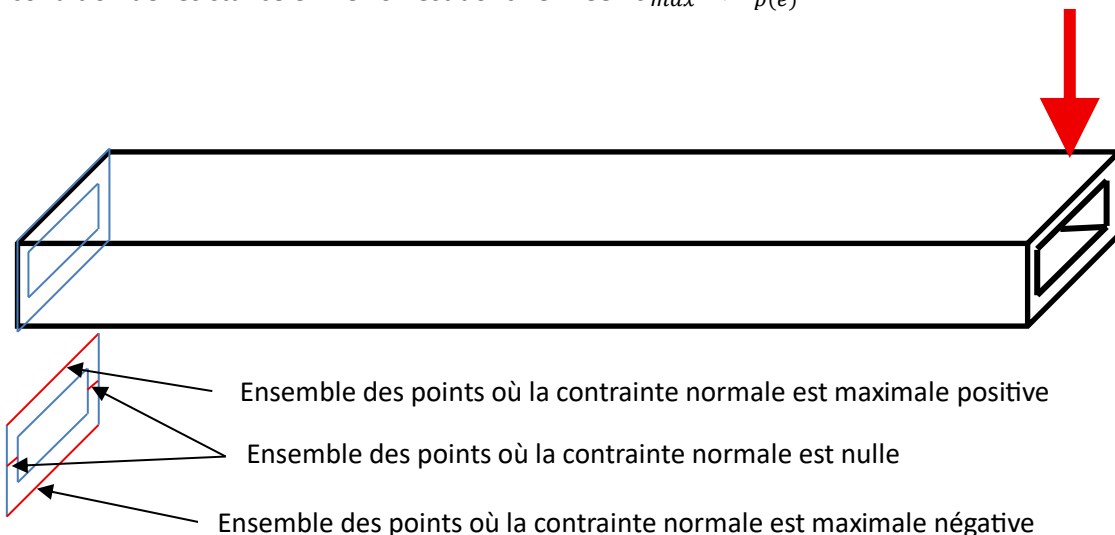
$$\sigma_{max} \approx 125 \times \frac{1}{2}$$

$$\sigma_{max} \approx 62,5 \text{ MPa}$$

La limite élastique en extension du S235 est de 235MPa.

Avec un coefficient de sécurité $s=3$ on a une résistance pratique en extension d'environ 80MPa.

La condition de résistance en flexion est donc vérifiée : $\sigma_{max} < R_{p(e)}$



f)

L'équation de la déformée est donnée par la relation :

$$v''(x) = \frac{M_{fz}(x)}{E \cdot I_{GZ}}$$

On a alors :

$$\forall x \in]0, L[, \quad v''(x) = \frac{F \cdot x - F \cdot L}{E \cdot I_{GZ}}$$

$$\forall x \in]0, L[, \quad v''(x) = \frac{F}{E \cdot I_{GZ}} \cdot (x - L)$$

D'où par intégration :

$$\forall x \in]0, L[, \quad v'(x) = \frac{F}{E \cdot I_{GZ}} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - L \cdot x + c_1 \right)$$

$$\forall x \in]0, L[, \quad v(x) = \frac{F}{E \cdot I_{GZ}} \cdot \left(\frac{x^3}{6} - L \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \cdot x + c_2 \right)$$

Conditions aux limites :

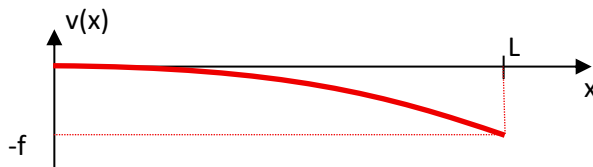
- Encastrement en A : $v'(0) = 0$ et $v(0) = 0$

On en déduit : $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$

D'où :

$$\forall x \in]0, L[, \quad v(x) = \frac{F}{E \cdot I_{GZ}} \cdot \left(\frac{x^3}{6} - L \cdot \frac{x^2}{2} \right)$$

Allure de la déformée



g)

la flèche est maximale pour $x = L$

$$f = |v(L)| = \left| \frac{F}{E \cdot I_{GZ}} \cdot \left(\frac{L^3}{6} - L \cdot \frac{L^2}{2} \right) \right|$$

$$f = |v(L)| = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I_{GZ}}$$

AN :

$$f = \frac{568 \times 2400^3}{3 \times 210 \cdot 10^3 \times 66,4 \cdot 10^4}$$

$$f \approx \frac{568 \times 2,4^3 \times 100}{3 \times 210 \times 66,4}$$

$$f \approx \frac{568 \times 14}{6,3 \times 66,4}$$

$$f \approx 20 \text{ mm}$$

h)

L'angle d'inclinaison θ est donnée par la relation :

$$\theta(x) = \text{Arctan}(v'(x))$$

Comme $v'(x)$ la pente de la déformée est très faible :

$$\theta(x) \approx v'(x) = \frac{F}{E \cdot I_{GZ}} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - L \cdot x \right)$$

On cherche l'inclinaison du panneau donc pour $x = L$:

$$\theta = |v'(L)|$$

$$\theta = \frac{F \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot I_{GZ}}$$

AN :

$$\theta = \frac{568 \times 2400^2}{2 \times 210 \cdot 10^3 \times 66,4 \cdot 10^4}$$

$$\theta \approx \frac{568 \times 2,4^2}{2 \times 210 \times 66,4 \cdot 10^1}$$

$$\theta \approx \frac{568 \times 6}{2 \times 210 \times 664}$$

$$\theta \approx \frac{5}{400}$$

$$\theta \approx 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\theta \approx 1,25 \times 60 \cdot 10^{-2} ^\circ$$

$$\theta \approx 5 \times 15 \cdot 10^{-2} ^\circ$$

$$\theta \approx 0,75 ^\circ$$

Vérification à l'aide du logiciel RDM7



