

I Sphère chargée en surface

1. $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$

2. A l'intérieur, la charge totale est nulle, donc le champ aussi. A l'extérieur, la charge totale vaut Q et le flux du champ $\vec{E}$ vaut

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(M)$$

donc

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Le potentiel est donné par la circulation du champ électrique

$$V(B) - V(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

donc le potentiel est constant dans la sphère, et à l'extérieur

$$V(\infty) - V(r) = - \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \cdot dr \vec{u}_r = + \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_r^\infty$$

soit, en supposant le potentiel nul à l'infini

$$V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le potentiel étant continu à la traversée de la surface chargée, on obtient la valeur à l'intérieur de la sphère

$$V(r < R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

3. E est discontinu à la traversée de la surface chargée.

4. Le champ devient nul à l'extérieur de la sphère et non nul à l'intérieur (modèle très simpliste d'un atome)

II Potentiel de Yukawa

Une distribution de charges crée en tout point de l'espace le potentiel

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

où a et q sont deux constantes positives.

1. Par définition $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V$. En coordonnées sphériques et compte tenu de la forme donnée pour V , on a donc

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{1}{ar}\right) \vec{u}_r$$

2. On calcule le flux traversant une sphère de rayon R

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ar}\right) \vec{u}_r \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{u}_r$$

ce qui donne

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ar}\right) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right)$$

3. Quand $r \rightarrow \infty$, l'exponentielle l'emporte et $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0$ et quand $r \rightarrow 0$, l'exponentielle tend vers 1, donc $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$. On en déduit que la charge intérieure est nulle quand $r \rightarrow \infty$, et vaut q quand $r \rightarrow 0$, ce qui correspond à une charge ponctuelle placée en O, le noyau, et une charge volumique de même valeur répartie dans tout l'espace. On a donc un modèle simplifié de l'atome quantique, avec une densité de charge de l'électron qui n'est pas vraiment localisée.

4.

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(-r^2 \|\vec{E}\| \right)$$

soit

$$\Delta V = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \left(1 + \frac{r}{a}\right) \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(\exp\left(-\frac{r}{a}\right) \left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{r}{a^2} \right] \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \frac{r}{a^2}$$

soit finalement

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r a^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

La densité de charge vaut alors

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi r a^2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

Cette densité de charge est partout négative et définie, comme le potentiel, pour $r > 0$, et correspond donc bien à une modélisation quantique de la charge de l'électron qui n'est plus localisée dans l'espace.

III Capacité d'un câble coaxial

1. Les charges sont égales en valeur absolue, donc

$$|\sigma_1| 2\pi R_1 h = |\sigma_2| 2\pi R_2 h \Rightarrow |\sigma_1| R_1 = |\sigma_2| R_2$$

2. Cf cours fil infini ou cylindre $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

3. On applique le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r fermé aux deux extrémités. Les contributions des surfaces fermant le cylindre sont nulles compte tenu de la forme du champ $\vec{E}$ et donc

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint E(r) \vec{u}_r \cdot r d\theta dz = 2\pi r h E(r)$$

La charge intérieure dépend de r :

- si $r < R_1$ ou $r > R_2$, la charge intérieure est nulle, et donc le champ est aussi nul,
- si $R_1 < r < R_2$, alors la charge intérieure vaut Q , la charge portée par l'armature 1. On a donc

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h}$$

Le potentiel est donné par la relation $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$, on a donc entre les deux armatures

$$V_2 - V_1 = - \int \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{u}_r \cdot dr \vec{u}_r = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} dr = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

4. Dans l'expression $Q = CU$ la relation est telle que Q est la charge de l'armature chargée positivement, et U en convention récepteur. Ici la charge Q est portée par l'armature 1, et donc la tension U qui apparaît dans la relation a pour valeur $U = V_1 - V_2$. On a alors en reprenant l'expression précédente

$$Q = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} (V_1 - V_2) \Rightarrow C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

IV Champ de gravitation de la Terre

1. La distribution de charges est invariante par rotation d'angle θ et φ . Tout plan contenant le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est plan de symétrie. La forme du champ est donc $\vec{g}(M) = g(r)\vec{u}_r$. On applique ensuite le théorème de Gauss appliqué à la force gravitationnelle :

$$\oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$$

Compte tenu de la forme de $\vec{g}$, le flux donne

$$\oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 g(r)$$

et la masse intérieure à la sphère de rayon $r > R_T$ est égale à la masse de la terre, ce qui donne finalement

$$\vec{g}(M) = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{u}_r$$

2. Si toute la masse est concentrée en O , la force de gravitation universelle exercée sur un objet de masse m vaut

$$\vec{F} = -G \frac{mM_T}{r^2} \vec{u}_R$$

et donc le champ gravitationnel est donc le même que celui créé par la distribution de masse uniforme.