Notions et contenus	Capacités exigibles
4.2. Magnétostatique	
Vecteur densité de courant volumique. Intensité du courant. Distributions de courant volumique et linéique.	Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant volumique.
Symétries et invariances des distributions de courant.	Exploiter les propriétés de symétrie et d'invariance des sources pour prévoir des propriétés du champ créé.
Propriétés de flux et de circulation. Théorème d'Ampère.	Identifier les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé à l'aide du théorème d'Ampère. Choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère en vue de déterminer l'expression d'un champ magnétique. Utiliser une méthode de superposition. Citer quelques ordres de grandeur de valeurs de champs magnétostatiques.
Modèles du fil rectiligne infini de section non nulle et du solénoïde infini.	Établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur.
Lignes de champ, tubes de champ.	Orienter les lignes de champ du champ magnétostatique créé par une distribution de courants. Associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à l'évolution de la position relative des lignes de champ. Vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.

Le champ magnétique est aux courants électriques ce que le champ électrique est aux charges. Il est créé par des déplacements de charges. Le présent chapitre a pour objectif une présentation de la méthode de calcul du champ magnétostatique dans des cas où les symétries permettent de simplifier le calcul.

I Sources du champ magnétique

I.1 Aimants et courants

Initialement, le magnétisme est né de l'étude et de l'observation des forces exercées par ou sur les aimants.

On constate expérimentalement que les aimants sont des sources du champ magnétique au même titre que les courants permanent. Nous ne nous intéresserons cette année qu'à des champs créés par des courants macroscopiques circulant des des conducteurs fixes. On peut garder à l'esprit qu'il est possible de modéliser le champ magnétique créé par les aimants par des boucles microscopiques de courants.

I.2 Courants volumiques

On définit le vecteur densité de courant volumique circulant dans une section du conducteur par la formule suivante qui la relie à l'intensité

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\overrightarrow{S}$$

où S est la surface de la section du conducteur et $d\overrightarrow{S}$ l'élément de surface élémentaire orienté de la section. L'intensité i est alors définie comme le flux de cette densité volumique de courant.

Expression de $\vec{j}$ On considère une section élémentaire de conducteur parcourue par un courant di tel que $di = \vec{j} \cdot d\overrightarrow{S}$. L'expression usuelle de l'intensité $i = \frac{dq}{dt}$ donne alors

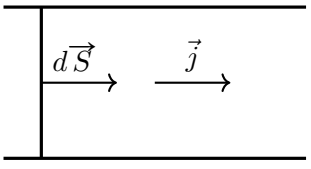
$$\vec{j} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{d^2q}{dt}$$

On appelle ρ_m la densité volumique de charge des porteurs de charges mobiles se déplaçant en un mouvement d'ensemble à la vitesse $\vec{v}$, supposée colinéaire à $d\overrightarrow{S}$.

Les porteurs qui traversent la section dS du conducteur pendant dt ont parcouru une distance vdt et se trouvent donc dans un cylindre de volume $dV = dSvdt$. On a alors $d^2q = \rho_m dV = \rho_m dSvdt$.

Finalement $di = \vec{j} \cdot d\overrightarrow{S} = \rho_m dSv = \rho_m \vec{v} \cdot d\overrightarrow{S}$ ce qui permet d'obtenir par identification l'expression du courant volumique

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v}$$



I.3 Courants surfaciques ou linéiques

On peut s'intéresser à des distributions linéiques (fil) ou surfaciques de courants. Dans le cas d'une distribution linéique, le vecteur densité de courant linéique n'a pas de sens.

Dans le cas d'une distribution surfacique (dont l'intérêt peut sembler assez abstrait pour l'instant), les charges traversent une courbe et

$$i = \int \vec{j}_s \cdot d\vec{l}$$

I.4 Ordres de grandeur

Les quelques ordres de grandeurs suivants sont à connaitre, et pour votre culture personnelle, et pour permettre un contrôle des erreurs dans les calculs numériques :

- électro-aimant utilisé en IRM 6 Teslas,
- aimant de néodyme-fer-bore de la taille d'une pièce 1 Tesla
- champ magnétique terrestre 4 mT

II Symétries et invariances du champ magnétique

II.1 Principe de superposition

Le champ magnétique créé en un point de l'espace par une distribution de courants est égal à la somme des champs créés par chacune des distributions de courant.

II.2 Symétries et invariances

II.2.1 Invariance par rotation ou translation

Le champ magnétostatique présente les mêmes invariances que la distribution de courants. Citons l'invariance par translation sur l'un des axes du système de coordonnées ou l'invariance par rotation de l'un des angles du système de coordonnées, ce qui implique un choix adéquat de système de coordonnées.

II.2.2 Plan de symétrie de la distribution des courants

On considère un plan Π de symétrie de la distribution des courants. Pour des raisons liées au fait que le champ magnétostatique est le résultat d'un produit vectoriel, la propriété de symétrie suivante est admise : un plan de **symétrie** pour la distribution de courants constitue un plan **d'anti symétrie** pour le champ magnétique.

En conséquence (cf raisonnement du cours d'électrostatique), le champ magnétostatique en un point M de l'espace appartenant à un plan de symétrie de la distribution de courants est perpendiculaire à ce plan Π.

II.2.3 Plan d'anti symétrie de la distribution des courants

On considère un plan Π^* d'anti symétrie de la distribution des courants. La propriété de symétrie suivante est admise : un plan **d'anti symétrie** pour la distribution de courants constitue un plan de **symétrie** pour le champ magnétique.

En conséquence (cf raisonnement du cours d'électrostatique), le champ magnétostatique en un point M de l'espace appartenant à un plan d'anti symétrie de la distribution de courants est contenu dans ce plan Π^*.

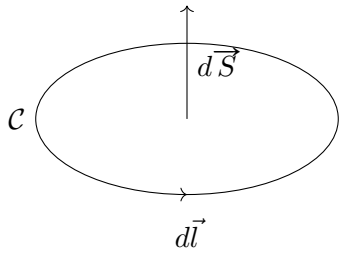
III Circulation et flux du champ magnétostatique

III.1 Circulation du champ magnétostatique : théorème d'Ampère

La circulation du champ magnétostatique le long d'un contour fermé $\mathcal{C}$ qui enlace une intensité I_{enlac} est donnée par le théorème d'Ampère

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlac}$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$. Le contour fermé $\mathcal{C}$ permet de définir une surface dont l'orientation est liée au sens choisi **arbitrairement** pour le sens de parcours du contour $\mathcal{C}$. L'orientation de la surface est donnée par la règle de la main droite.



III.2 Conservation du flux du champ magnétostatique

L'observation des cartes de champ magnétique (cf cours de PTSI) montre un comportement semblable à celui du champ électrique dans des régions de l'espace vides de charges. On admet la propriété suivante : le champ magnétostatique est à flux conservatif

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Cette propriété est liée à l'absence de monopôle magnétique, ce qui correspond au comportement classique d'un aimant : lorsque l'on casse un aimant en deux, on produits 2 aimants.

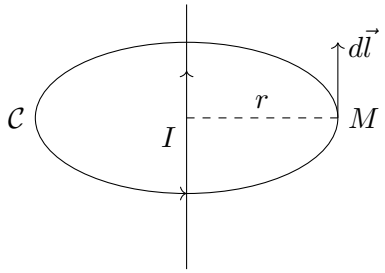
IV Exemples de calculs

La méthode générale est la même formellement que pour le cas électrostatique :

- étude des symétries et invariances, choix du système de coordonnées,
- choix raisonné du contour d'Ampère **fermé**,
- calcul de la circulation du champ magnétostatique le long du contour orienté **arbitrairement**,
- détermination du courant enlacé (en tenant compte de l'orientation de la surface traversée par i),
- application du théorème d'Ampère pour exprimer le champ.

IV.1 Fil infini

On considère un fil infini porté par l'axe Oz parcouru par un courant I constant.



Symétries et invariances Il y a invariance par translation sur l'axe Oz et par rotation d'angle θ ce qui implique d'utiliser les coordonnées cylindriques, et dans ce cas $\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{B}(r)$.

Par ailleurs, en un point M donné de l'espace, il passe un plan de symétrie de la distribution de courant, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$. Le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan et donc $\overrightarrow{B}(M) = B(M)\vec{u}_\theta$.

Finalement la forme du champ est la suivante $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$.

Circulation du champ et courant enlacé On choisit comme contour d'ampère un cercle de rayon r centré sur O et passant par M. On a alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} B(r)\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta dl = \int_0^{2\pi} B(r) r d\theta$$

On obtient donc en calculant la circulation

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r)$$

Le courant enlacé est simplement égal à I compte tenu du choix arbitraire d'orientation du contour, on obtient donc en appliquant le théorème d'Ampère

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

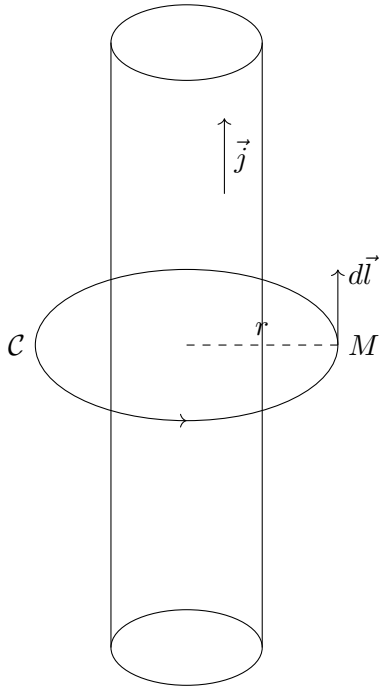
soit vectoriellement

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

IV.2 Cylindre infini

On considère maintenant un cylindre infini porté par l'axe Oz, de rayon R parcouru par un courant I constant et uniforme dans le cylindre, de sorte que

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint j dS = \pi R^2 j$$



Symétries et invariances Les symétries et invariances sont identiques à celles du fil infini. La forme du champ est donc la suivante $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta$.

Circulation du champ On choisit comme contour d'ampère un cercle de rayon r centré sur O et passant par M. On a alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\mathcal{C}} B(r)\vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_\theta dl = \int_0^{2\pi} B(r) r d\theta$$

On obtient donc en calculant la circulation

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r)$$

Courant enlacé La valeur du courant enlacé dépend de r : si $r > R$, le courant enlacé est simplement égal à I compte tenu du choix arbitraire d'orientation du contour, on obtient donc en appliquant le théorème d'Ampère

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

soit vectoriellement

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

Si $r < R$, alors le courant enlacé vaut

$$I_{enlac} = \iint \vec{j} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint j dS = \int_0^r \int_0^{2\pi} j dr r d\theta = \pi r^2 j = I\frac{r^2}{R^2}$$

Le théorème d'Ampère donne alors

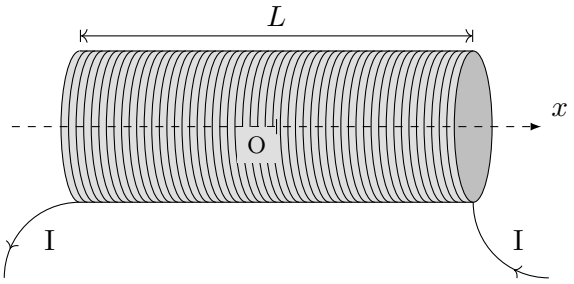
$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B(r) = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R^2}$$

et vectoriellement

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta$$

IV.3 Solénoïde infini

On appelle solénoïde un enroulement régulier de fil conducteur sur un cylindre.

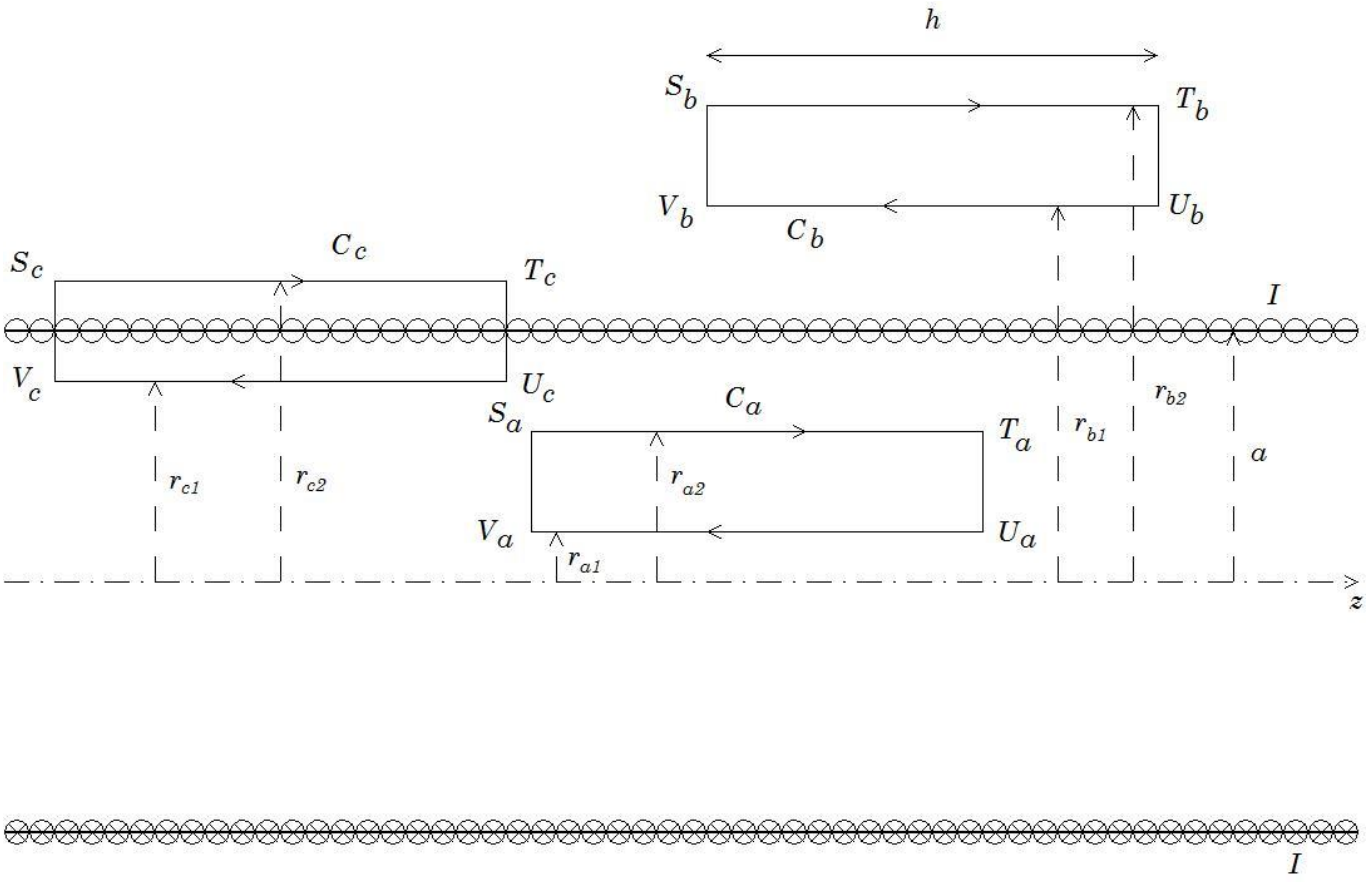


Le solénoïde, de rayon R et de longueur $L \gg R$ est composé de N spires de rayon R parcourues par un courant I. On note $n = N/L$ le nombre de spires par unité de longueur.

Symétries et invariances Il y a invariance par translation d'axe $\vec{u}_x$ et par rotation d'angle θ. Nous allons donc choisir les coordonnées cylindriques avec un axe du solénoïde porté par Ox.

Le plan contenant M et perpendiculaire à l'axe du cylindre Ox est un plan de symétrie de la distribution de de courant. C'est le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Le champ magnétostatique prend donc la forme $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\vec{u}_x$.

Circulation du champ et courant enlacé Nous allons calculer la circulation et le courant enlacé sur les trois contours suivants. Rappelons que la forme du contour doit si possible être choisie de manière à simplifier le calcul du produit scalaire $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{dl}$, ce qui justifie ici l'emploi de contours rectangulaires avec un coté parallèle à $\vec{u}_r$ qui donnera un produit scalaire nul et un coté parallèle à $\vec{u}_x$ qui donnera un produit scalaire sans termes en cos.



La circulation du champ a la même expression dans les trois cas

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_T^U \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_U^V \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_V^S \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_S^T \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Comme précisé précédemment, les intégrales sur TU et VS sont nulles en raison de la nullité du produit scalaire. Il reste

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S^T \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_U^V \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^h B(r_2)\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x dx + \int_h^0 B(r_1)\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x dx = h(B(r_2) - B(r_1))$$

Le courant enlacé dépend lui du contour :

- $I_{enlac} = 0$ pour C_a et C_b, ce qui signifie que le champ est constant dans ces deux zones. On admet que le champ est nul à l'infini, ce qui donne un champ uniformément nul à l'extérieur du solénoïde,
- $I_{enlac} = -nhI$ pour le contour C_c, en faisant attention à la convention utilisée pour l'orientation de la surface, ici en sens opposé à I. On obtient alors dans ce cas

$$h(B(r_2) - B(r_1)) = -\mu_0 nhI$$

Comme $B(r_2) = 0$, on a alors

$$B(r_1) = \mu_0 nI$$

Finalement, le champ a donc pour expression

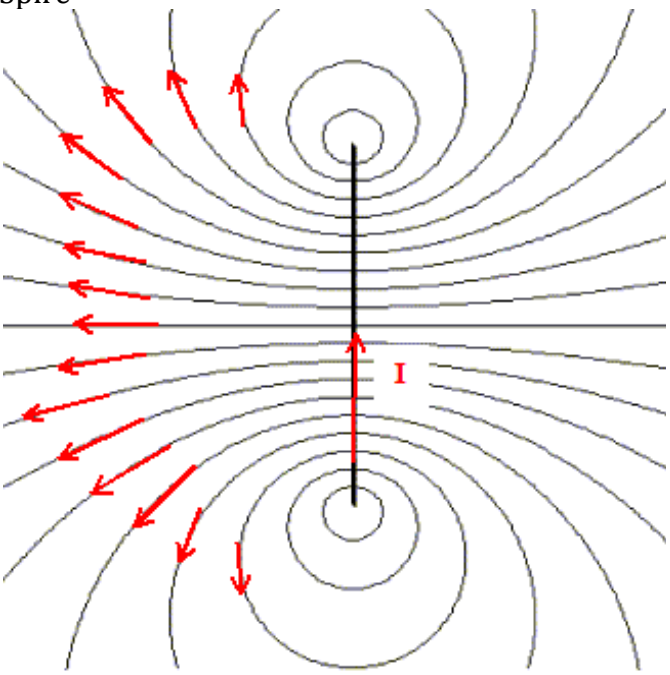
$$\overrightarrow{B} = \begin{cases} \mu_0 nI\vec{u}_x & \text{pour} \quad r < R\,(intérieur) \\ \overrightarrow{0} & \text{pour} \quad r > R\,(extérieur) \end{cases}$$

V Topographie du champ magnétostatique

Les définitions et propriétés sont les même que pour le champ électrostatique mais nous n'avons pas défini, conformément au programme, de potentiel "magnétostatique". Les lignes de champs sont donc les seuls outils de topographie du champ magnétique, le champ leur est en tout point tangent.

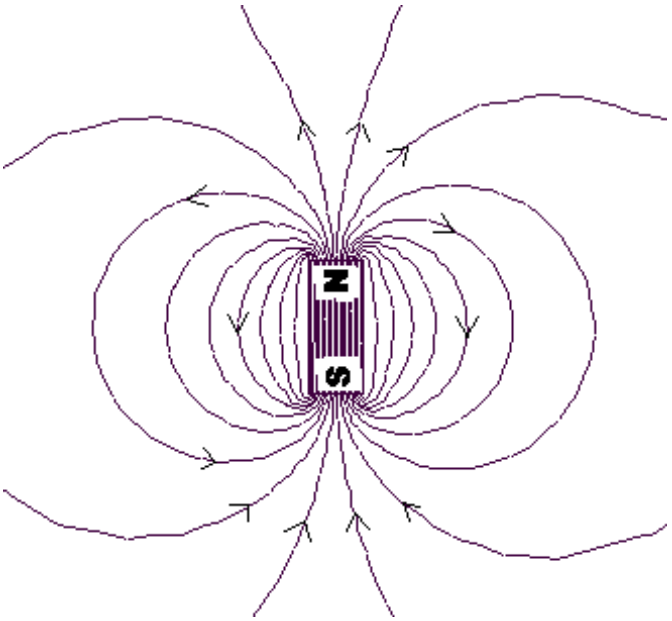
Notons que, contrairement au champ électrostatique en présence de charge, les lignes de champ magnétostatique se referment toujours.

Spire

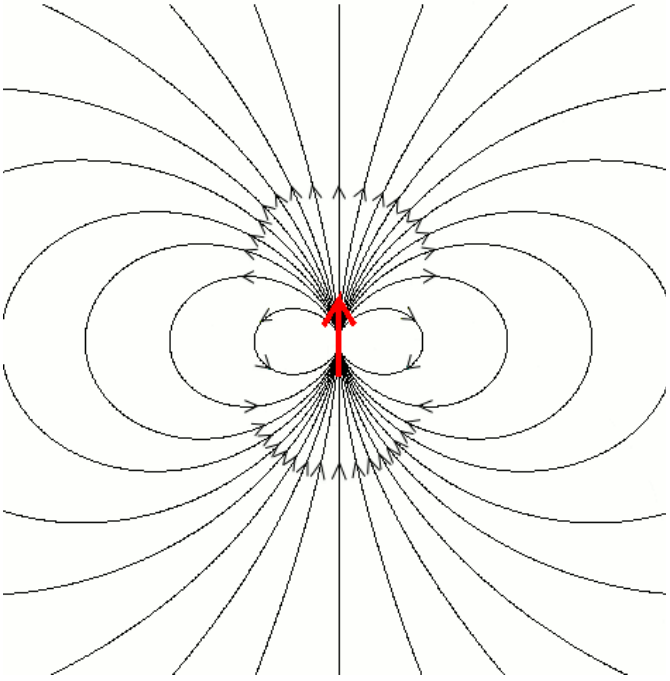


Lignes de champ magnétostatique

Aimant droit



Dipôle magnétique



Solénoïde

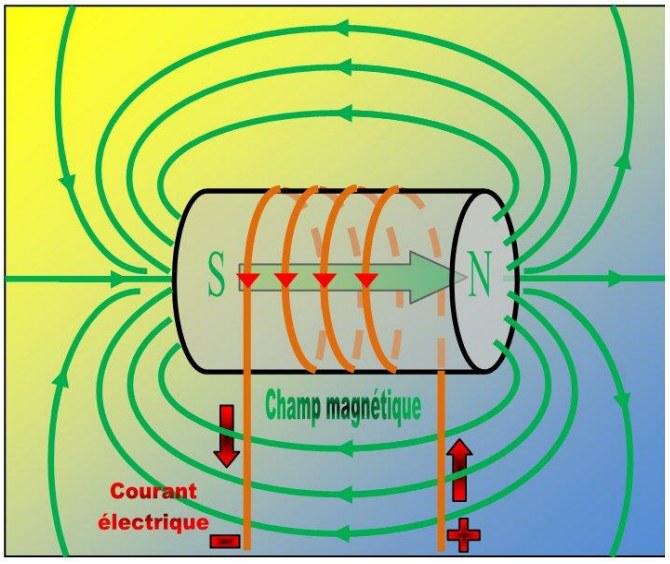


Table des Matières

I Sources du champ magnétique . . . 1
I.1 Aimants et courants . . . 1
I.2 Courants volumiques . . . 2
I.3 Courants surfaciques ou linéiques . . . 2
I.4 Ordres de grandeur . . . 3
II Symétries et invariances du champ magnétique . . . 3
II.1 Principe de superposition . . . 3
II.2 Symétries et invariances . . . 3
II.2.1 Invariance par rotation ou translation . . . 3
II.2.2 Plan de symétrie de la distribution des courants . . . 3
II.2.3 Plan d'anti symétrie de la distribution des courants . . . 3
III Circulation et flux du champ magnétostatique . . . 4
III.1 Circulation du champ magnétostatique : théorème d'Ampère . . . 4
III.2 Conservation du flux du champ magnétostatique . . . 4
IV Exemples de calculs . . . 4
IV.1 Fil infini . . . 5
IV.2 Cylindre infini . . . 5
IV.3 Solénoïde infini . . . 7
V Topographie du champ magnétostatique . . . 9