Ligne coaxiale /22

1.1 Il y a invariance par translation sur z et par rotation d'angle θ, donc $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E}(r)$. Par ailleurs, le plan passant par M et perpendiculaire à Oz est un plan de symétrie $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est aussi un plan de symétrie et donc $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

1.2.a. On choisit comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur l fermé aux deux extrémités par des disques de rayons r. Le flux du champ électrique à travers cette surface vaut donc

$$\oiint \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{sup} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} + \iint_{inf} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} + \iint_{lat} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S}$$

Les deux premières intégrales sont nulles car le produit scalaire est nul ($d\overrightarrow{S} = dS\vec{u}_z$). Il reste

$$\oiint \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{lat} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r r d\theta dz = E(r)2\pi rl$$

La charge est repartie en surface des conducteurs, donc la charge intérieure est nulle pour $r < r_1$, donc dans cette région $E(r) = 0$.

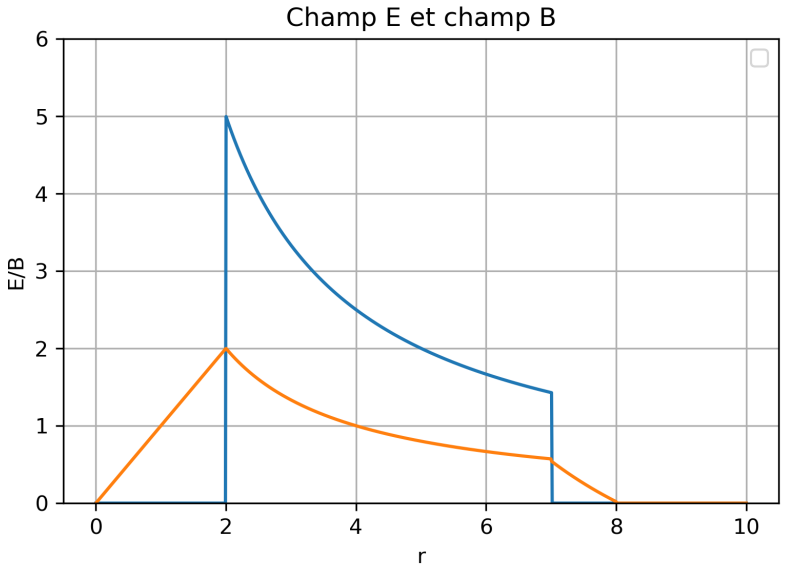
Pour $r > r_2$, la charge totale est nulle, donc $E(r) = 0$.

Enfin, entre les deux conducteurs, la charge totale vaut Q le théorème de Gauss donne

$$E(r)2\pi rl = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi rl\varepsilon}$$

1.2.b. Le champ reste nul car il n'y a pas de charges entre r_2 et $r_2 + e$.

1.3.a.



1.3.b. Il y a des discontinuités à la traversée des surfaces chargées en r_1 et r_2.

1.4. La tension est donnée par

$$U_{12} = V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 E(r)dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

1.5. La capacité est donnée par la relation $Q = CU_{12}$ donc

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

et par unité de longueur

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

1.6. L'énergie emmagasinée dans un condensateur vaut $W_e = \frac{1}{2}CU_{12}^2$ donc

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}U_{12}^2$$

1.7. Numériquement $C_1 = 92,4\,pF \cdot m^{-1}$.

1.8. $W_e = 4,62 \cdot 10^{-9}\,J$.

2.1 Il y a invariance comme pour $\overrightarrow{E}$ donc $\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{B}(r)$.

Le plan contenant M et l'axe Oz est un plan de symétrie de la distribution de courant, $\overrightarrow{B}$ lui est perpendiculaire et donc $\overrightarrow{B} = B(r)\vec{u}_\theta$.

2.2 On applique le théorème d'Ampère à un cercle d'axe Oz et de rayon r. Le calcul de la circulation donne

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot d\vec{l} = B(r)2\pi r$$

Pour $r < r_1$, le courant enlacé vaut $I = j_1\pi r^2 = \frac{I}{\pi r_1^2}\pi r^2 = I\frac{r^2}{r_1^2}$ donc

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r_1^2}\vec{u}_\theta$$

Pour $r_1 < r < r_2$, le courant enlacé vaut $I = +I$ donc

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

Pour $r_2 < r < r_2 + e$, le courant enlacé vaut

$$I = I - I\frac{\pi r^2 - \pi r_2^2}{\pi(r_2+e)^2 - \pi r_2^2} = I\frac{\pi(r_2+e)^2 - \pi r^2}{\pi(r_2+e)^2 - \pi r_2^2}$$

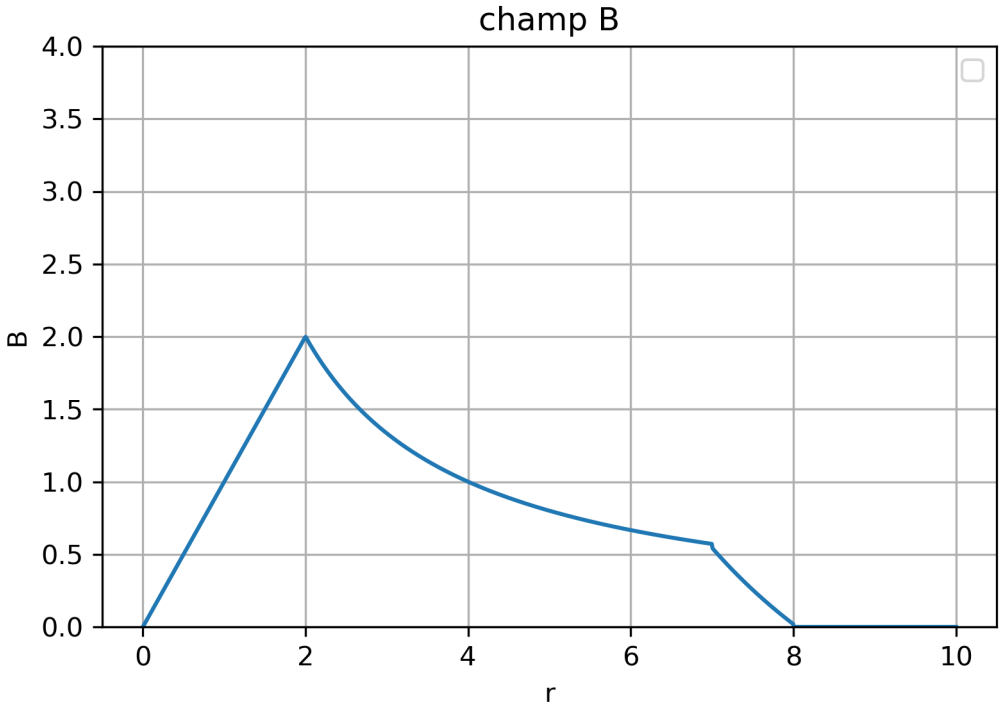
donc

$$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{\pi(r_2+e)^2 - \pi r^2}{\pi(r_2+e)^2 - \pi r_2^2}\vec{u}_\theta$$

Pour $r > r_2 + e$, le courant enlacé vaut $I = 0$ donc

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$$

2.3.a.



2.3.b. Il n'y a pas de discontinuités car les distributions sont volumiques.

2.4.a.

$$dV = dr\, r d\theta dz$$

2.4.b.

$$W_m = \iiint \frac{1}{2\mu_0} B^2 dV = \iiint \frac{1}{2\mu_0} B(r)^2 dr\, r d\theta dz = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{l} dz \int_0^{+\infty} B^2(r) r dr$$

soit

$$W_m = \frac{\pi l}{\mu_0} \int_0^{+\infty} B^2(r) r dr$$

Cette dernière intégrale se découpe en 4 parties mais on néglige les parties situées dans l'âme et dans le blindage. Par ailleurs, le champ est nul pour $r > r_2$, donc finalement

$$W_m = \frac{\pi l}{\mu_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r^2} r dr = \frac{\pi l}{\mu_0} \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

2.5. L'énergie emmagasinée dans la bobine vaut $W_m = \frac{1}{2}LI^2$ donc

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

2.6. Par unité de longueur

$$L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

2.7. Numériquement $L_1 = 2,41 \cdot 10^{-7}\, H \cdot m^{-1}$.

3.1.

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint j dS = j \iint dS = jS = \gamma SE$$

Par ailleurs, on peut calculer la circulation du champ électrique en régime indépendant du temps

$$U_{AB} = V_A - V_B = -\int_A^B dV = \int \overrightarrow{E} \cdot d\vec{l} = EL$$

où L est la longueur de conducteur étudiée. Par définition, la résistance d'un conducteur est donnée par

$$R = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{EL}{\gamma SE} = \frac{L}{\gamma S}$$

soit par unité de longueur

$$R_l = \frac{1}{\gamma S}$$

Les résistances de l'âme et du blindage s'additionnent car elles sont en série donc la résistance totale par unité de longueur vaut

$$R_1 = \frac{1}{\gamma\pi}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_3^2 - r_2^2}\right)$$

3.2. Numériquement $R_1 = 2,9 \cdot 10^{-3}\, \Omega \cdot m^{-1}$.

3.3. Pour un câble de 10 mètres, la résistance totale du câble vaut $R_c = 2,9 \cdot 10^{-2}\, \Omega \ll R_u$, donc $E_G = R_u I = 10\, V$.

I Étude d'un microphone de guitare (Banque PT 2013)

1 Préliminaires

1. Théorème d'Ampère

1.a.

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$$

1.b. En utilisant le théorème de Stokes

$$\iint \overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}\cdot d\overrightarrow{S} = \oint \overrightarrow{B}\cdot d\vec{l} = \iint \mu_0\vec{j}\cdot d\overrightarrow{S} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\cdot d\overrightarrow{S} = \mu_0 I_{enl} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\iint \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{S}$$

1.c. En régime quasi stationnaire, le courant de déplacement est négligeable et on retrouve le théorème d'Ampère

$$\oint \overrightarrow{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl}$$

2 Solénoïde infini

2.a. À la limite, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$ donc

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 ni}{2}(1+1)\vec{u}_z = \mu_0 ni\vec{u}_z$$

2.b. cf cours.

2.c. Le champ magnétique étant uniforme, le flux est donné par

$$\Phi_1 = BS = \mu_0 ni\pi R^2$$

3 Résistance du bobinage

3.a. Le vecteur $\vec{j}$ est le vecteur densité de courant dont le flux donne l'intensité du courant électrique. Son unité est le $A\cdot m^{-2}$.

3.b. Par définition

$$I = \iint \vec{j}\cdot d\overrightarrow{S} = jS$$

Or dans un conducteur ohmique $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ donc $I = \gamma ES$. Enfin $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -Edz$. Comme $\vec{E}$ est uniforme, $U = E/d$ et donc finalement

$$I = \frac{\gamma US}{d}$$

3.c. Par définition, la résistance est donnée par $U = RI$, donc

$$R = \frac{d}{\gamma S}$$

3.d.

$$R = \frac{2\pi RN}{\gamma\pi(D/2)^2} = \frac{8NR}{\gamma D^2} = 2,7k\Omega$$

4 Inductance propre du bobinage

4.a

$$\Phi_N = NBS = N\mu_0 ni\pi R^2$$

4.b. On rappelle que l'inductance d'une bobine vaut

$$L = N\mu_0 n\pi R^2$$

II Condensateur et One Piece

24. Soit M un point de l'espace. Si on néglige les effets de bords, tout plan contenant le point M et le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_z}$ est un plan de symétrie de la distribution de charge et donc, d'après le principe de Curie, un plan de symétrie du champ électrique. Par conséquent, le champ électrique est porté par le vecteur $\overrightarrow{u_z}$.
De plus, la distribution de charge est invariante par translation selon les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$. La norme du champ électrique possède la même invariance.

$$\overrightarrow{E} = E(z)\overrightarrow{e_z}$$

Considérons dans un premier temps, uniquement la surface au sol, de charge $-Q$.
Appliquons le théorème de Gauss en utilisant la surface fermée Σ_g délimitant un cylindre d'axe (Oz) et dont les deux bases, de surfaces S sont situées respectivement aux altitudes $z > 0$ et $-z$ (on note Σ_1 et Σ_2 ces deux bases).

$$\oiint_{P\in\Sigma_g} \overrightarrow{E}(P).\overrightarrow{n}(P)\mathrm{d}S_p = \frac{-Q}{\varepsilon_0}$$

Le flux sur la surface latérale est nulle car le champ électrique est tangent à la surface.

$$\oiint_{P\in\Sigma_g} \overrightarrow{E}(P).\overrightarrow{n}(P)\mathrm{d}S_p = \iint_{P\in\Sigma_1} \overrightarrow{E}(P).\overrightarrow{u_z}\mathrm{d}S_p - \iint_{P\in\Sigma_2} \overrightarrow{E}(P).\overrightarrow{u_z}\mathrm{d}S_p = E(z)S - E(-z)S$$

De plus, lorsqu'on considère la charge du sol seule, le plan (Oxy) est un plan de symétrie de la charge et donc du champ électrique. Le champ électrique étant perpendiculaire à ce plan : $E(-z) = -E(z)$
Finalement, pour $z > 0$:

$$E(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$

On montre de la même façon que la couche d'air chargée crée, pour $z < d$, le champ électrique :

$$E(z) = -\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$$

D'après le principe de superposition, le champ électrique total est donc :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\overrightarrow{e_z}}$$

25. En calculant la circulation du champ électrique de la couche d'air jusqu'au sol :

$$U_0 = \int_{air}^{sol} \overrightarrow{E}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \int_{z=d}^{z=0} -\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\mathrm{d}z$$

$$\boxed{U_0 = \frac{d\sigma_0}{\varepsilon_0}}$$

26. Applications numériques :

$$\boxed{\sigma_0 = 1{,}8 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}\cdot\mathrm{m}^{-2}}$$

$$\boxed{E = 2{,}0 \times 10^{4}\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$$

27. Cette tension n'est pas dangereuse car elle est appliqué entre deux points très éloignés. On remarque en effet que la valeur du champ électrique créé est bien inférieure (deux ordres de grandeur) à la valeur du champ disruptif de l'air, valeur à partir de laquelle un arc électrique se formerait.

28. En reprenant les résultats précédents, on a directement :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{U_0}{d}\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z}}$$

29. Équations de Maxwell :

$$\boxed{\begin{aligned}
\text{Maxwell-Gauss :} \quad & \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\text{Maxwell-Thomson :} \quad & \mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0 \\
\text{Maxwell-Faraday :} \quad & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \\
\text{Maxwell-Ampère :} \quad & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\left(\overrightarrow{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}\right)
\end{aligned}}$$

30. Dans la région située entre les deux armatures (vide de charge et de courant), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned}
\text{Maxwell-Gauss :} \quad & \mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0 \\
\text{Maxwell-Thomson :} \quad & \mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0 \\
\text{Maxwell-Faraday :} \quad & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \\
\text{Maxwell-Ampère :} \quad & \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}
\end{aligned}}$$

L'équation de Maxwell-Ampère montre que si le champ électrique est variable, alors le champ magnétique ne peut pas être nul.

De plus, tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie du champ électrique et donc un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Le champ magnétique est donc orthoradial.

31. En calculant le flux des deux membres de l'équation de Maxwell-Ampère à travers une surface notée S délimitée par un contour fermé noté C, le théorème de Stokes-Ampère donne :

$$\oint_C \overrightarrow{B}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mu_0\varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}.\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S$$

En échangeant la dérivée et l'intégrale :

$$\oint_C \overrightarrow{B}.\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S$$

On obtient bien l'expression proposée avec :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}$$

$$\boxed{\Phi_{\overrightarrow{E}} = \iint_S \overrightarrow{E}.\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S}$$

III Thermochimie

1 Les deux réactifs sont des phases condensées, on peut donc supposer leur capacité thermique constante. Ainsi,

$$\Delta H \underbrace{=}_{\text{1er ppe}} Q \underbrace{=}_{\text{Joule}} \left(n_{\mathrm{CaF_2}} C^\circ_{P,\mathrm{CaF_2}} + n_{\mathrm{H_2SO_4}} C^\circ_{p,\mathrm{H_2SO_4}}\right)(T_0 - T_I)$$

En remplaçant on obtient

$$\boxed{Q = \left(\frac{m_{\mathrm{CaF_2}}}{M_{\mathrm{CaF_2}}} C^\circ_{p,\mathrm{CaF_2}} + \frac{m_{\mathrm{H_2SO_4}}}{M_{\mathrm{H_2SO_4}}} C^\circ_{p,\mathrm{H_2SO_4}}\right)(T_0 - T_I) = 1{,}6 \cdot 10^8\,\mathrm{J}}$$

2 D'après la loi de Hess,

$$\boxed{\Delta_\mathrm{r} H^\circ = 2\Delta_\mathrm{f} H^\circ(\mathrm{HF}) + \Delta_\mathrm{f} H^\circ(\mathrm{CaSO_4}) - \Delta_\mathrm{f} H^\circ(\mathrm{CaF_2}) - \Delta_\mathrm{f} H^\circ(\mathrm{H_2SO_4}) = 69{,}8\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}\,.}$$

Il s'agit de l'**approximation d'Ellingham**.

3 Le bilan de matière de la transformation est le suivant.

	$\mathrm{CaF_2}$	+	$\mathrm{H_2SO_4}$	=	2 HF	+	$\mathrm{CaSO_4}$
État initial	$n_{\mathrm{CaF_2},I}$ $= 2{,}82 \cdot 10^3\,\mathrm{mol}$		$n_{\mathrm{H_2SO_4},I}$ $= 2{,}86 \cdot 10^3\,\mathrm{mol}$		0		0
État final	$n_{\mathrm{CaF_2},I} - \xi_\mathrm{f}$ $= 0$		$n_{\mathrm{H_2SO_4},I} - \xi_\mathrm{f}$ $= 40\,\mathrm{mol}$		$2\xi_\mathrm{f}$ $= 5{,}63 \cdot 10^3\,\mathrm{mol}$		ξ_f $= 2{,}82 \cdot 10^3\,\mathrm{mol}$

Cela correspond à des masses

$$m_{\mathrm{H_2SO_4}} = n_{\mathrm{H_2SO_4},F} M_{\mathrm{H_2SO_4}} = 3{,}92\,\mathrm{kg} \qquad \text{et} \qquad m_{\mathrm{CaSO_4}} = n_{\mathrm{CaSO_4},F} M_{\mathrm{CaSO_4}} = 383\,\mathrm{kg}$$

4 La pression finale se déduit de l'équation d'état des gaz parfaits,

$$P_F = \frac{(n_\mathrm{HF} + n_\mathrm{air}) R T_0}{V_0}\,.$$

La quantité de matière initiale d'air étant donnée par

$$n_\mathrm{air} = \frac{P_0 V_0}{R T_0} \qquad \text{avec} \qquad P_0 = 1\,\mathrm{bar}$$

il vient

$$\boxed{P_F = P_0 + \frac{R T_0}{V_0} n_{\mathrm{HF},F} = 2{,}9\,\mathrm{bar}\,.}$$

5 La transformation est isochore mais pas isobare : on ne peut donc pas procéder directement à un bilan d'enthalpie, il faut raisonner en termes d'énergie interne. D'après le premier principe,

$$\Delta U = Q_\mathrm{c}\,.$$

Or par définition de l'énergie interne, on a au cours de la transformation isochore

$$\Delta U = \Delta H - V_0\,\Delta P = \xi_F\,\Delta_\mathrm{r} H^\circ - V_0(P_F - P_0)$$

En combinant,

$$\boxed{Q_\mathrm{c} = \xi_F\,\Delta_\mathrm{r} H^\circ - V_0(P_F - P_0) = 2{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{J}\,.}$$

> *La relation $\Delta H = \xi_F\,\Delta_\mathrm{r} H^\circ$ est moralement la définition de l'enthalpie standard de réaction : elle est donc vraie quelles que soient les conditions expérimentales, y compris si la transformation n'est pas isobare. En revanche, la relation $Q_{\text{reçu}} = \xi_F\,\Delta_\mathrm{r} H^\circ$ est une traduction du premier principe, qui ne prend sa « forme enthalpique » que pour une transformation monobare avec équilibre mécanique initial et final ... ce qui n'est pas le cas ici.*

6 Non : la réaction est endothermique, donc le milieu réactionnel refroidirait, ce qui ralentirait la transformation.