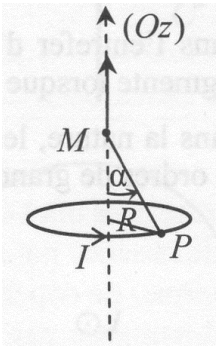
III-Solenoide fini de spires jointives

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\vec{u}_z$$



1. $\overrightarrow{B}$ est perpendiculaire aux plans de symétrie, ici le plan contenant la spire de courant, donc sur $\vec{u}_z$.

2. $\vec{u}_z$.

3. Le champ est créé par $N = ndz_p$ spires donc

$$d\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha n dz_p \vec{u}_z$$

Or $\tan\alpha = \frac{R}{z-z_p} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ et donc $z_p = z - \frac{R}{\tan\alpha}$

$$dz_p = -d\left(\frac{R\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = -R\frac{-\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}d\alpha = \frac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha$$

et donc

$$d\overrightarrow{B} = \frac{n\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\frac{R}{\sin^2\alpha}d\alpha\vec{u}_z = \frac{n\mu_0 I}{2}\sin\alpha d\alpha\vec{u}_z$$

4. En intégrant on obtient

$$\overrightarrow{B} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{n\mu_0 I}{2}\sin\alpha d\alpha\vec{u}_z = \frac{n\mu_0 I}{2}\vec{u}_z\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\sin\alpha d\alpha = -\frac{n\mu_0 I}{2}\vec{u}_z(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

et donc

$$\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\vec{u}_z$$

5. $\alpha_1 \to 0$ et $\alpha_2 \to \pi$, on retrouve l'expression habituelle.

IV - Nappe de courant volumique

1. Il y a invariance par translation sur les axes Ox et Oy. Par ailleurs, le plan yOz est plan de symétrie, donc

$$\overrightarrow{B}(M) = B(z)\vec{e}_x$$

Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie de la distribution de courant, c'est donc un plan d'antisymétrie pour $\overrightarrow{B}$ donc $B(z) = -B(-z)$.

2. On choisit comme contour d'Ampère un circuit rectangulaire perpendiculaire à $\vec{j}$. Ce contour comprend deux cotés pour lesquels $d\vec{l} = \pm dz\vec{e}_z$ qui donnent un produit scalaire nul avec $\overrightarrow{B}$. Il reste, avec $z_1 < z_2$

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^\ell B(z_2)\vec{e}_x \cdot dx\vec{e}_x + \int_0^\ell B(z_1)\vec{e}_x \cdot (-)dx\vec{e}_x = \ell B(z_2) - \ell B(z_1) = \ell(B(z_2) - B(z_1))$$

Si le contour passe au dessus et en dessous de la zone de courant volumique, alors $I_{enl} = j\ell 2a$. Par ailleurs, si on choisit (soigneusement) $z_1 = -z_2$ pour utiliser la propriété de parité de $\overrightarrow{B}$, alors

$$2\ell B(z) = 2\mu_0 j\ell a \Rightarrow B(z) = \mu_0 ja \text{ pour } z > 0,\ B(z) = -\mu_0 ja \text{ pour } z < 0$$

Si le contour est à l'intérieur des plans $z = \pm a$, alors $I_{enl} = 2j\ell z$. Par ailleurs, si on choisit (soigneusement) $z_1 = -z_2$ pour utiliser la propriété de parité de $\overrightarrow{B}$, alors

$$2\ell B(z) = 2\mu_0 j\ell z \Rightarrow B(z) = \mu_0 jz \forall z$$

3. $a \to 0$ mais le produit ja reste constant car le courant volumique tend vers $+\infty$ car le volume tend vers 0. Le courant surfacique est égal à $j_s = \int_{-a}^{a} j dz = 2ja$. Seul le champ à l'extérieur de la couche continue d'exister, et il vaut

$$B = \frac{\mu_0 j_s}{2} \text{ pour } z > 0,\ B(z) = -\frac{\mu_0 j_s}{2} \text{ pour } z < 0$$

VI - Inductance linéique d'un coaxial

1. La géométrie est celle du fil infini, donc $\overrightarrow{B} = B(r)\vec{e}_\theta$. On choisit donc comme contour d'Ampère un cercle de rayon r, la circulation du champ magnétique donne alors

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r)$$

Si $r < R_1$, alors le courant enlacé est nul. Il en va de même pour $r > R_2$ car $I_{enl} = I - I$. Dans ces deux zones, $B(r) = 0$.

Si $R_1 < r < R_2$, alors $I_{enl} = I$ et donc

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

2. On calcule le flux

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \cdot dr dz \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \int_0^h dz$$

ce qui donne

$$\Phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

3. D'après l'énoncé, $\Phi = LI$, donc par identification

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

L'inductance linéique est l'inductance par unité de longueur, donc

$$l = \frac{L}{h} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$