

I Filtrage d'un signal périodique

1 Voir figure 1.

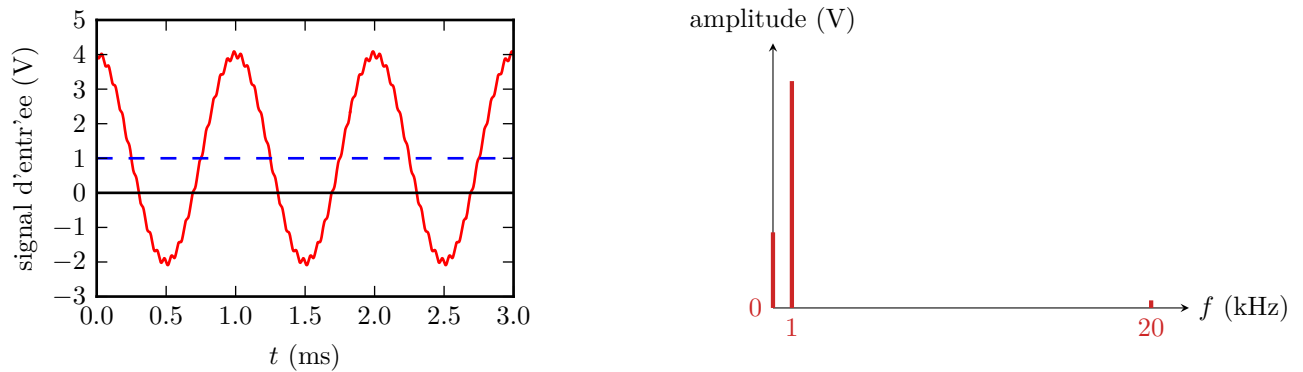
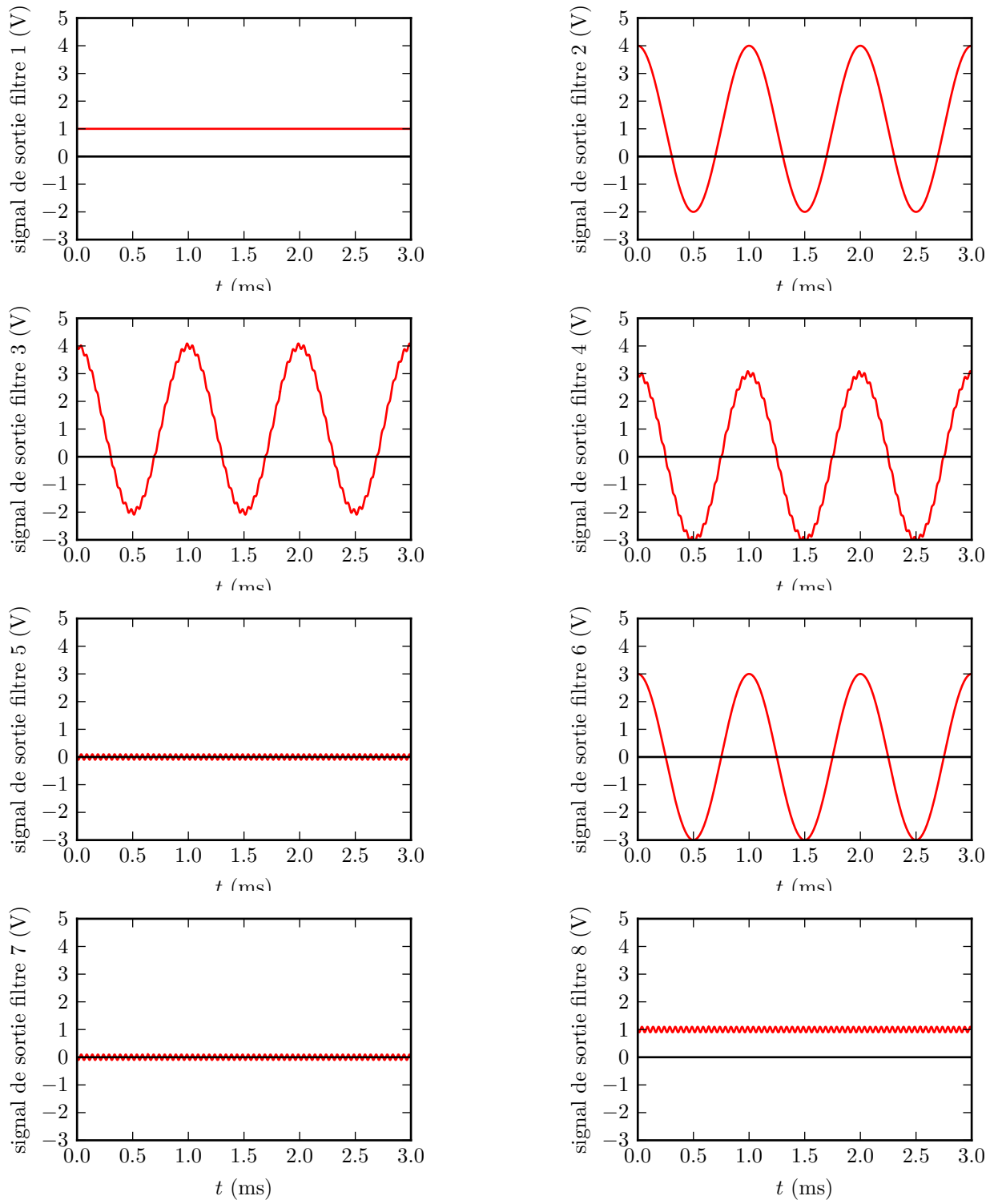


Figure 1 – Signal d'entrée.

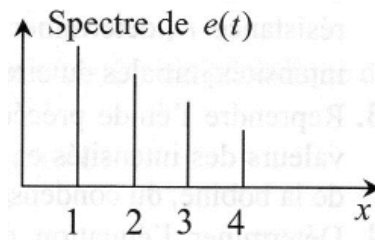
2 En posant $f = 1 \text{ kHz}$ et $A = 1 \text{ V}$, le signal d'entrée s'écrit

$$e(t) = A + 3A \cos(2\pi ft) + \frac{A}{10} \cos\left(40\pi ft + \frac{\pi}{2}\right).$$

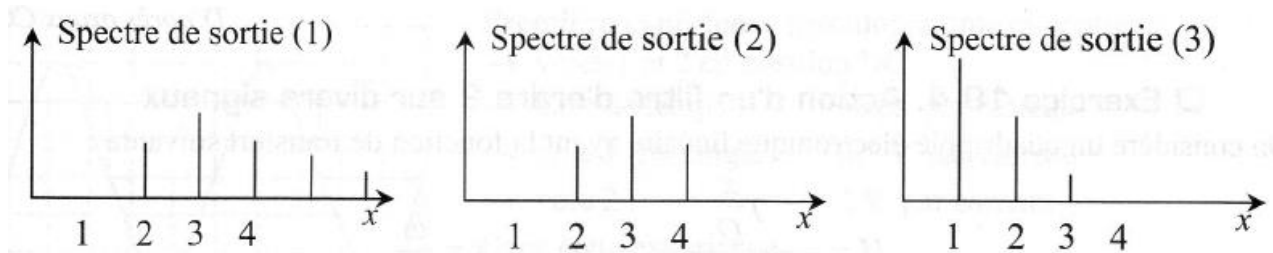
3 Voir figure 2. Sans plus de précision, les filtres sont supposés idéaux, c'est-à-dire qu'ils transmettent (resp. coupent) parfaitement les composantes qui appartiennent (resp. qui n'appartiennent pas) à leur bande passante, et de gain unité dans leur bande passante.

**Figure 2 – Signaux de sortie des différents filtres.**

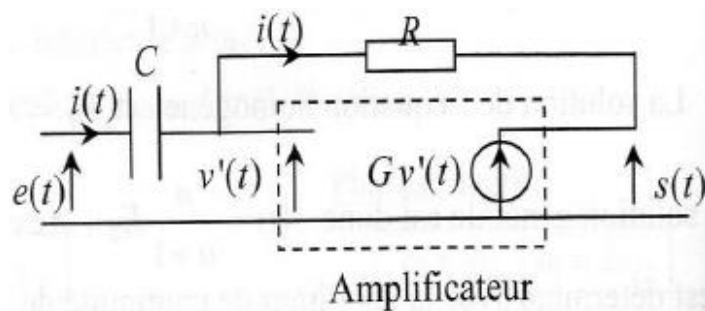
II Linéarité et caractéristique d'un filtre



1. 2 et 3 car 1 présente des harmoniques non présentes dans le spectre d'entrée.
2. 2 semble être un filtre passe bande centré autour de $x = 3$ et qui divise l'amplitude de l'harmonique à $x = 2$ par deux, il est donc assez sélectif et présente une bande passante de l'ordre de 1.
- 3 amplifie les basses fréquences, c'est donc un filtre passe bas.



III Stabilité d'un système linéaire



1. En utilisant la loi des mailles $e(t) - u_C - u_R - s(t) = 0$, on n'y arrive pas trop. Loi des noeuds en terme de potentiel

$$i_C = i_R \Rightarrow \frac{u_C}{Z_C} = \frac{u_R}{Z_R}$$

Or $s(t) = Gv'(t)$, $e(t) - u_C - v'(t) = 0$ et $v'(t) - u_R - s(t) = 0$ donc

$$\frac{e(t) - v'(t)}{Z_C} = \frac{v'(t) - s(t)}{Z_R} \Rightarrow R \left(e(t) - \frac{s(t)}{G} \right) = Z_C \left(\frac{s(t)}{G} - s(t) \right)$$

soit

$$Re(t) = s(t) \left(\frac{R}{G} + \frac{Z_C}{G} - Z_C \right) = s(t) \left(\frac{R + Z_C - GZ_C}{G} \right)$$

donc

$$H = \frac{s}{e} = \frac{RG}{R + Z_C - GZ_C}$$

Comme $Z_C = \frac{1}{Cp}$, on a

$$H = \frac{GRCp}{1 + RCp - G}$$

2.

$$(1 - G + RCp)s = GRCpe \Rightarrow \frac{ds}{dt} + \frac{1 - G}{RC}s = G \frac{de}{dt}$$

3. Dépend de la valeur de G. A priori le gain est supérieur à 1, donc montage instable (voir chapitre oscillateurs).

IV Isolation d'une composante

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{2jRC\omega}{1 + a + 2jRC\omega - 2(RC\omega)^2}$$

1. On commence par diviser par $2jRC\omega$

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{1 + \frac{1+a}{2jRC\omega} - \frac{2(RC\omega)^2}{2jRC\omega}} = -\frac{1}{1 - j\frac{1+a}{2RC\omega} + jRC\omega}$$

soit par analogie avec la formule voulue

$$\frac{1+a}{2RC\omega} = Q \frac{\Omega}{\omega} \quad RC\omega = Q \frac{\omega}{\Omega}$$

En faisant le produit de ces deux termes on obtient

$$\frac{1+a}{2RC\omega} RC\omega = \frac{1+a}{2} = Q \frac{\Omega}{\omega} Q \frac{\omega}{\Omega} = Q^2$$

ce qui donne

$$Q = \sqrt{\frac{1+a}{2}}$$

et finalement

$$\frac{1+a}{2RC\omega} = Q \frac{\Omega}{\omega} \Rightarrow \Omega = \frac{1+a}{2QR} = \frac{1+a}{2RC} \sqrt{\frac{2}{1+a}} = \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{1+a}{2}}$$

On a alors $A = -1$

2. Passe bande d'ordre 2 de bande passante $\Delta\omega$ telle que

$$\frac{\Omega}{\Delta\omega} = Q$$

Q croît avec a . Par contre $\Delta\omega$ est indépendant de a car Ω dépend lui aussi de a

$$\Delta\omega = \frac{\Omega}{Q} = \sqrt{\frac{2}{1+a}} \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{1+a}{2}} = \frac{1}{RC}$$

3.1 On souhaite isoler la fréquence $N\omega_1$ des autres et en particulier des fréquences les plus proches $(N-1)\omega_1$ et $(N+1)\omega_1$, distantes de ω_1 . Il faut donc que la largeur de la bande passante soit largement plus petite que ω_1 soit

$$\Delta\omega = \frac{\Omega}{Q} = \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{1+a}{2}} \sqrt{\frac{2}{1+a}} = \frac{1}{RC}$$

soit comme condition $\Delta\omega \ll \frac{1}{RC}$.

3.2 De manière évidente il faut que la fréquence centrale du filtre soit adaptée à la fréquence à isoler ...

4. D'après les questions précédentes, la fréquence centrale du filtre est

$$\Omega = \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{1+a}{2}} = \frac{Q}{RC} \Rightarrow R = \frac{Q}{C\Omega}$$

Comme le fondamental est à $f = 40 \text{ Hz}$, et qu'on récupère l'harmonique $N = 5$ on a $Nf = 200 \text{ Hz}$

$$R = \frac{20}{3,4 \cdot 10^{-6} 2\pi \cdot 200} = 4,7 \text{ k}\Omega$$