

Vous avez étudié le filtrage linéaire en première année, en supposant que le régime permanent est toujours atteint. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre aux conditions nécessaires à ce comportement, qui correspond au fait que le régime transitoire disparaît.

1. Stabilité des systèmes linéaires	
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (relation différentielle).
Stabilité.	Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 d'après les signes des coefficients de la relation différentielle ou de la fonction de transfert.

I Système linéaire continu invariant

I.1 Définition

Considérons un système transformant une entrée notée $e(t)$ en une sortie $s(t)$. Dans le cas général, ces grandeurs (dépendantes du temps) peuvent être de tout type (mécanique (position, vitesse, force ...), thermodynamique (température ...), électrique ...) ; dans ce chapitre, nous nous contenterons de nous intéresser à des tensions. Les systèmes considérés devront être :

- **linéaires** : si à des entrées e_1 et e_2 sont associées des sorties s_1 et s_2 , alors à l'entrée $e = \lambda e_1 + \mu e_2$ (où λ et μ sont des constantes réelles) est associée la sortie $s = \lambda s_1 + \mu s_2$
- **continus** : les grandeurs sont définies à tout instant
- **invariants** : le comportement du système est indépendant de l'instant considéré. Ainsi, si une entrée identique est appliquée à deux instants différents, les deux réponses seront identiques.

I.2 Fonction de transfert opérationnelle d'un système LCI

Nous avons vu en première année :

- qu'en régime sinusoïdal permanent, un système LCI transforme une entrée sinusoïdale en sortie sinusoïdale de même pulsation,
- qu'il suffit donc pour déterminer le signal de sortie de déterminer, **pour chaque fréquence/pulsation**, son amplitude et son déphasage par rapport au signal d'entrée, souvent pris comme référence,

Nous avons introduit la notation complexe et la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

On peut donc en déduire, en notant $e(t) = E_m \cos(\omega t + \phi_e)$ et $s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi_s)$

- en amplitude

$$S_m = |\underline{H}(j\omega)|E_m$$

- en phase

$$\phi_s = \phi_e + \arg(\underline{H}(j\omega))$$

Cette fonction de transfert permet l'étude en régime sinusoïdal permanent, et par ailleurs, compte tenu des propriétés des séries de Fourier et du caractère LCI du système, l'étude en régime périodique (non sinusoïdal !) permanent.

On peut par ailleurs étudier la réponse à une sollicitation quelconque du système en étudiant l'équation différentielle sous la forme générale

$$\sum b_k \frac{d^k s(t)}{dt^k} = \sum a_l \frac{d^l e(t)}{dt^l}$$

qui se traduit en régime sinusoïdal forcé grâce à la transformation en notation complexe $\frac{d^k s(t)}{dt^k} \rightarrow (j\omega)^k$ par

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\sum a_l (j\omega)^l}{\sum b_k (j\omega)^k}$$

On appelle **ordre** d'un filtre le degré du polynôme au dénominateur de la fonction de transfert (k) et nous admettrons qu'il est supérieur au degré du polynôme au numérateur (l)¹.

Il est important de noter que les deux représentations temporelle (à base d'équations différentielles) et fréquentielle (à base de fonction de transfert) sont liées.

On introduit en conséquence la **fonction de transfert opérationnelle** $H(p)$ pour laquelle p vaut $j\omega$ dans le domaine fréquentiel et $\frac{d}{dt}$ dans le domaine temporel, ce qui permet une écriture unifiée

$$H(p) = \frac{\sum a_l p^l}{\sum b_k p^k}$$

Dans la pratique, le programme se limite à des systèmes d'ordre 2 au plus, donc

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}$$

On peut alors revenir aux expressions :

- dans le domaine fréquentiel

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2}{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2}$$

- dans le domaine temporel

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2}$$

¹Dans le cas contraire, l'amplitude du signal de sortie croît indéfiniment avec la fréquence ce qui pose un problème de divergence de l'énergie associée au signal.

I.3 Stabilité d'un système LCI

On souhaite s'assurer que pour les systèmes étudiés, le régime transitoire disparaît bien après un certain temps. Nous allons étudier successivement les systèmes d'ordre 1 et 2.

Système d'ordre 1 Les systèmes d'ordre 1 sont régis par une fonction de transfert opérationnelle de la forme

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p}{b_0 + b_1 p}$$

avec $b_1 \neq 0$. Dans le domaine temporel, elles se ramènent à l'équation différentielle suivante

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt}$$

La solution de cette équation différentielle est la somme d'une solution particulière qui dépend du second membre et qui constitue l'éventuel régime permanent, et d'une solution générale de l'équation homogène, qui constitue l'éventuel régime transitoire, de la forme

$$s_g(t) = A \exp\left(-\frac{b_0}{b_1} t\right)$$

La réponse du système est dite **stable** lorsque cette solution tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Pour qu'un système d'ordre 1 soit stable, il faut et il suffit que b_0 et b_1 soient de même signe.

Système d'ordre 2 Les systèmes d'ordre 2 sont régis par une fonction de transfert opérationnelle de la forme

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}$$

avec $b_2 \neq 0$. Dans le domaine temporel, elles se ramènent à l'équation différentielle suivante

$$b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2}$$

La solution de cette équation différentielle est la somme d'une solution particulière qui dépend du second membre et qui constitue l'éventuel régime permanent, et d'une solution générale de l'équation homogène, qui constitue l'éventuel régime transitoire. La réponse du système est dite **stable** lorsque le régime transitoire tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Pour qu'un système d'ordre 2 soit stable, il faut et il suffit que b_0 , b_1 et b_2 soient tous de même signe.

II Signaux périodiques

II.1 Décomposition d'un signal périodique

On considère une fonction $f(t)$ périodique de période T . On montre, sous certaines conditions mathématiques², qu'il est possible de décomposer cette fonction en une série dite de Fourier

$$f(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et n entier naturel. Le coefficient s_0 représente la valeur de la moyenne du signal $f(t)$ sur une période. Les coefficients de la série, appelés coefficients de Fourier, peuvent se calculer avec les formules suivantes³ :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cos(n\omega t) dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \sin(n\omega t) dt$$

La fonction $s_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ est l'**harmonique de rang n** , et plus la rang est élevé, plus la pulsation et la fréquence sont élevées. L'harmonique de rang $n = 1$ est appelé **fondamental**. Enfin, concernant les propriétés mathématiques, la série est une série dont les termes tendent assez rapidement vers 0, ce qui en fait une série convergente.

Propriété Si la fonction $s(t)$ est paire, alors les b_n ($n \geq 1$) sont nuls, si la fonction est impaire, alors les a_n ($n \geq 0$) sont nuls.

Remarque Il est important de comprendre le lien entre le rang de l'harmonique et l'échelle temporelle : plus n est grand, plus le terme $s_n(t)$ décrit une fonction qui oscille rapidement. Plus n est grand, plus on a accès à des détails fins du comportement temporel du signal.

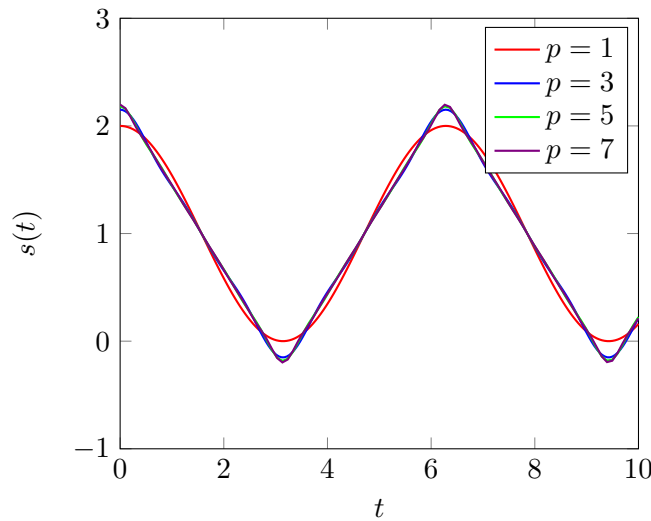
Exemple de décomposition en série de Fourier On considère un signal triangulaire pair de période T et de valeur moyenne non nulle égale à s_0 . Le calcul des coefficients de Fourier donne la décomposition suivante

$$s(t) = s_0 - \frac{4(s_{max} - s_{min})}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos[(2n+1)\omega t]}{(2n+1)^2}$$

On constate que le caractère pair implique l'absence de termes en sinus. Les courbes représentatives de la décomposition pour des séries dont on a coupé les termes supérieurs à p sont présentées ci dessous

²fonction de classe C^1 par morceaux.

³Hors programme



On remarque qu'avec l'augmentation de p , les détails de la fonction sont d'autant mieux rendus, en particulier les variations brusques au niveau des maximum et des minimum. La propriété de décroissance rapide des coefficients se traduit par les corrections apportées en passant de p à $p + 2$.

II.2 Notion de spectre

Développement en série de Fourier On peut, en utilisant les formules trigonométriques, montrer que la décomposition précédente peut se mettre sous la forme suivante⁴

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

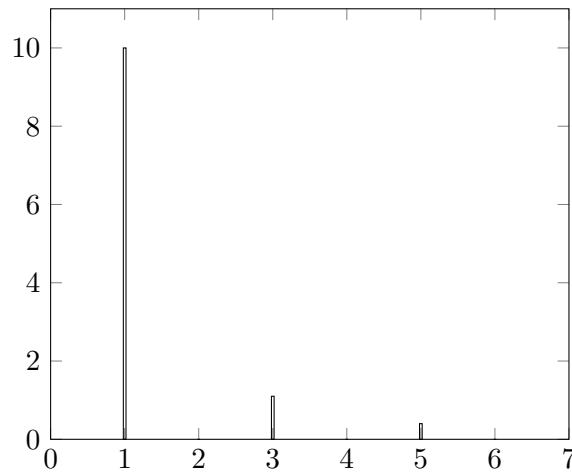
Cette écriture représente le **développement en série de Fourier** de $s(t)$:

- s_0 est la moyenne de la fonction $s(t)$ sur une période,
- le terme $n = 1$ est le fondamental, dont la période est la même que la période du signal,
- les termes suivants sont les harmoniques d'ordre n .

Le calcul des c_n (comme celui des a_n et b_n) n'est pas au programme.

Spectre du signal Le spectre est constitué par le graphique donnant l'amplitude c_n en fonction de la fréquence ou de la pulsation. Comme le spectre est discret, il prend la forme de bâtons d'une hauteur proportionnelle à l'amplitude de l'harmonique de fréquence $f_n = 2\pi n\omega$. Il est en général inutile de représenter le spectre pour des harmoniques de rang très élevé en raison de la décroissance rapide des coefficients du développement de Fourier (exemple du signal triangulaire).

⁴Nous avons utilisé des propriétés analogues pour donner les différentes formes de solution de l'équation de l'oscillateur harmonique.



Remarque Ce qui a été dit dans cette partie peut se généraliser aux fonctions non périodiques, en particuliers les fonctions périodiques définies sur un intervalle fini, en utilisant la transformée de Fourier.

III Caractère dérivateur ou intégrateur d'un filtre

Comme on l'a vu lors de l'introduction de la représentation complexe, les opérations de dérivation et d'intégration se traduisent respectivement par une multiplication et une division par $j\omega$. En retour, un filtre qui, souvent de manière asymptotique, possède une fonction de transfert qui est proportionnelle à $j\omega$ possède, dans le domaine temporel, un caractère dérivateur. De même, un filtre qui, de manière asymptotique, possède une fonction de transfert qui est inversement proportionnelle à $j\omega$ possède, dans le domaine temporel, un caractère intégrateur.

III.1 Caractère dérivateur

Un filtre est dit dérivateur dans un domaine de fréquence si la tension de sortie est proportionnelle à la dérivée de la tension d'entrée dans ce domaine de fréquence

$$s(t) = K \frac{de(t)}{dt}$$

avec K réel non nul. En régime sinusoïdal forcé, on passe en notation complexe et alors $\underline{s} = K j\omega \underline{e}$, donc

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = j\omega K$$

Un filtre dérivateur se caractérise donc par une fonction de transfert multiple de $j\omega$. Dans le diagramme de Bode, un comportement dérivateur se traduit par une **pente de 20 dB/decade** en gain et un argument de $\pi/2$ (si $K > 0$).

III.2 Caractère intégrateur

Un filtre est dit intégrateur dans un domaine de fréquence si la tension de sortie est proportionnelle à l'intégrale de la tension d'entrée dans ce domaine de fréquence

$$s(t) = K \int e(t) dt$$

avec K réel non nul. En régime sinusoïdal forcé, on passe en notation complexe et alors $\underline{s} = K/j\omega \underline{e}$, donc

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{K}{j\omega}$$

Un filtre intégrateur se caractérise donc par une fonction de transfert multiple de $1/j\omega$. Dans le diagramme de Bode, un comportement dérivateur se traduit par une **pente de -20 dB/decade** en gain et un argument de $\pi/2$ (si $K > 0$).

IV Filtrage d'un signal périodique

En revenant sur le début du chapitre, on cherche donc à filtrer un signal périodique $e(t)$. Si celui-ci est sinusoïdal de pulsation ω , alors $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ on peut simplement écrire que la sortie du filtre $s(t)$ est

$$s(t) = G(\omega) E_m \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

où $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ représentent le gain et le déphasage dus au filtre **à la fréquence** ω .

Si le signal $e(t)$ est simplement périodique, alors on peut le décomposer en série de Fourier

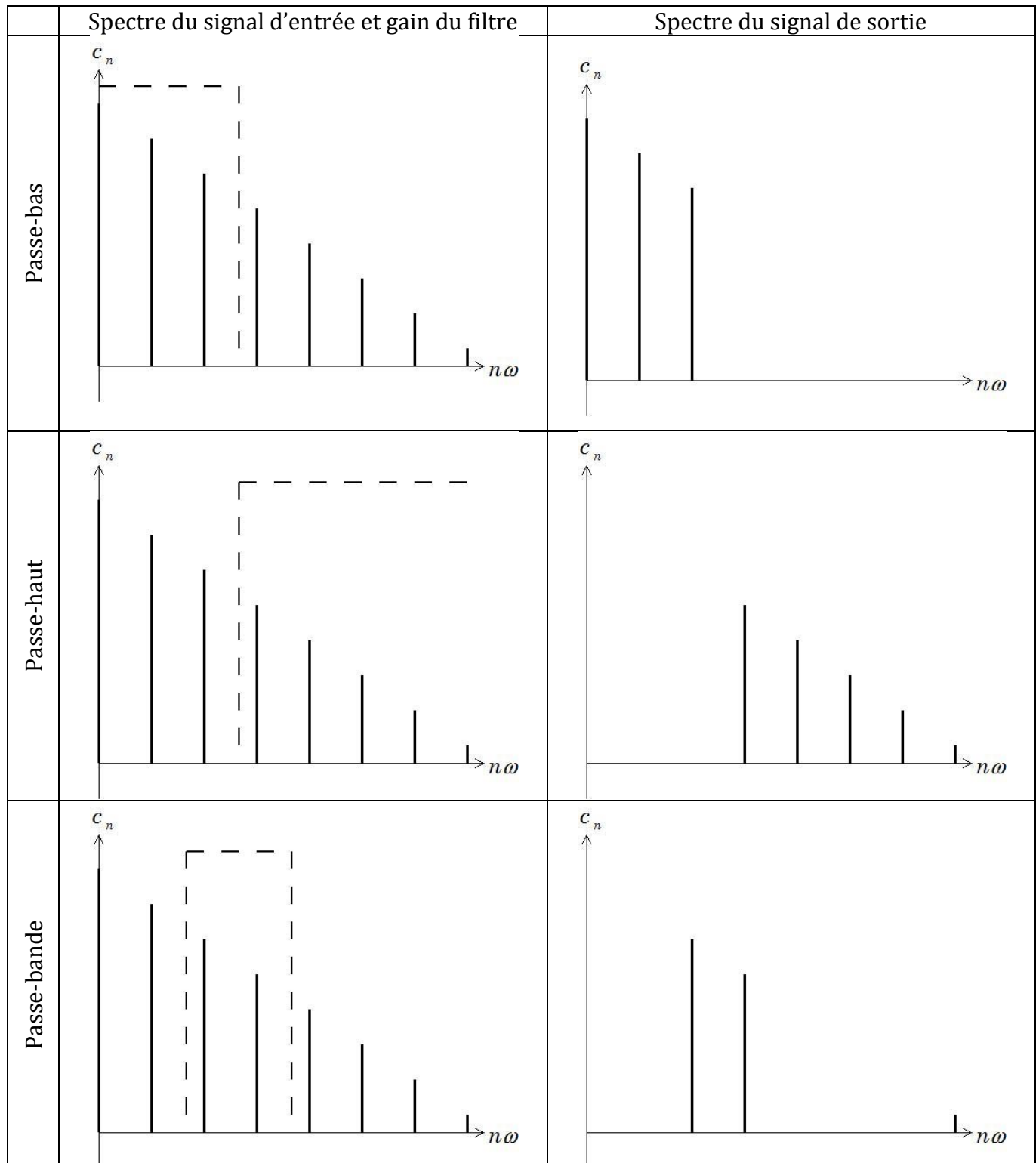
$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

et **chaque composante**⁵, y compris s_0 , voit son amplitude (gain de la fonction de transfert) et sa phase (phase de la fonction de transfert) modifiée

$$s(t) = G(0)s_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} G(n\omega) c_n \cos(n\omega t + \phi_n + \varphi(n\omega))$$

⁵On dit merci à la linéarité du filtre !

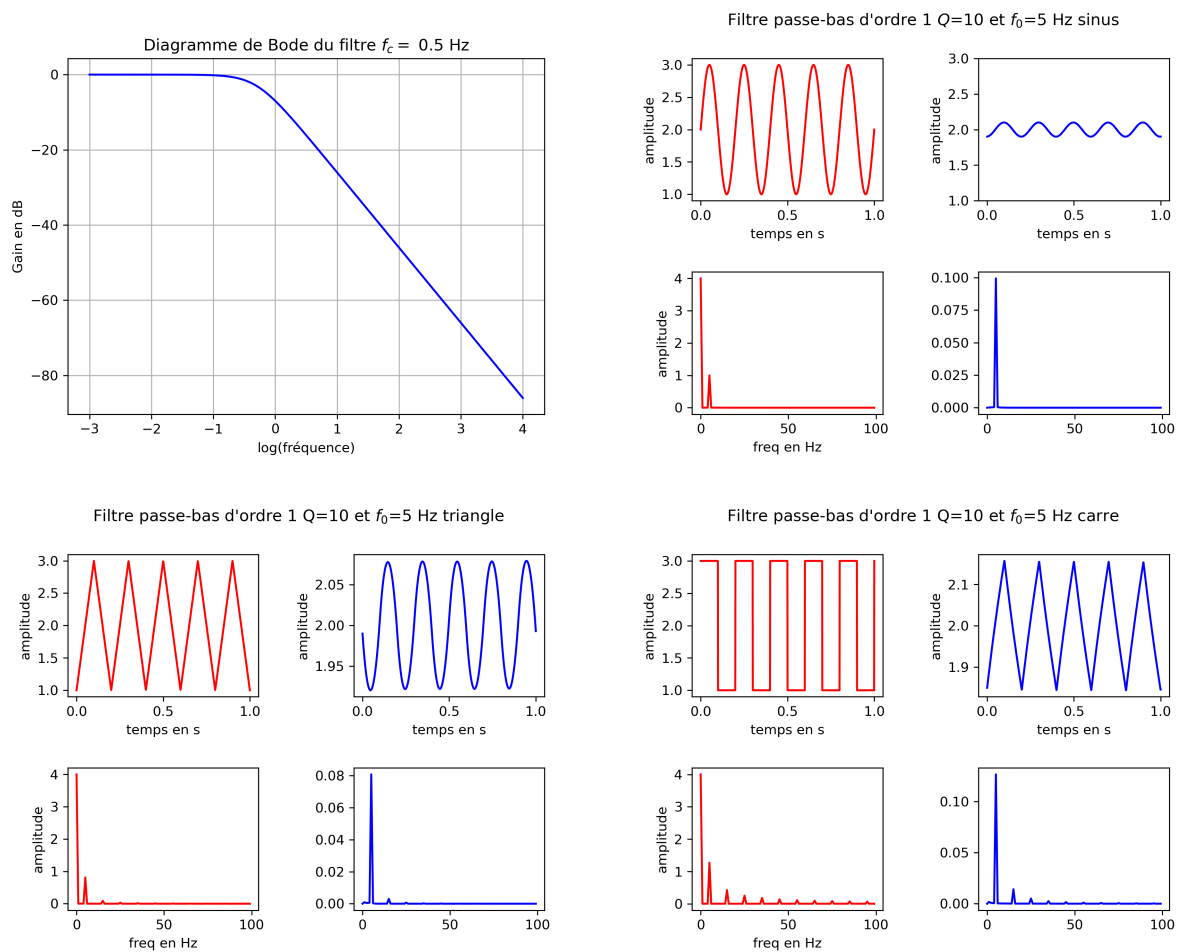
IV.1 Effet des différents filtres sur un signal périodique quelconque



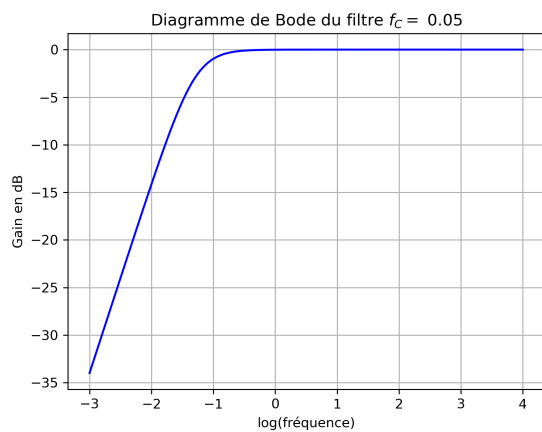
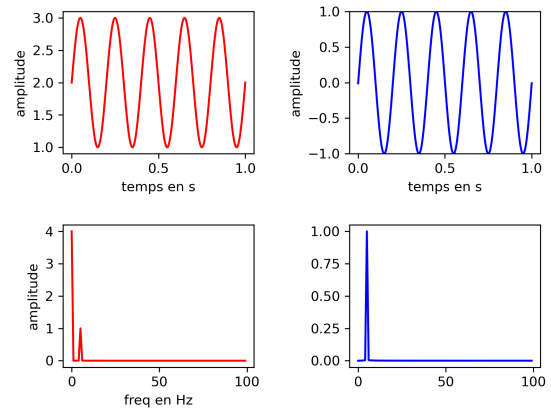
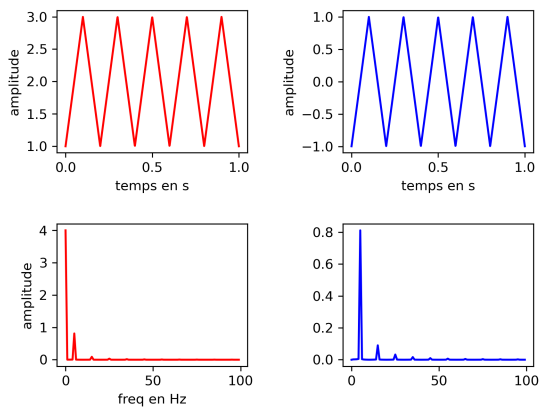
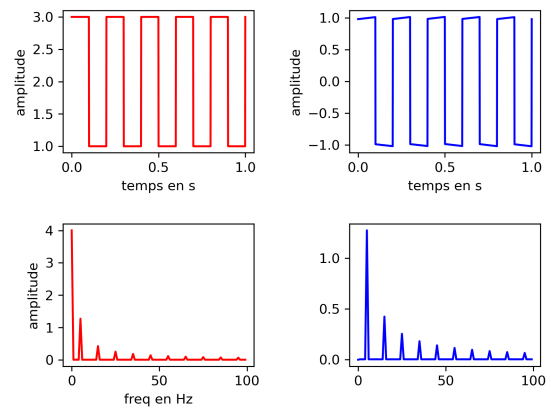
IV.2 Effets des filtres usuels sur des signaux périodiques

Pour chaque série, le diagramme de Bode en amplitude est présenté en haut à gauche, puis les effets sur les signaux. Pour chaque signal, on présente à gauche l'entrée (rouge) et à droite la sortie (bleu).

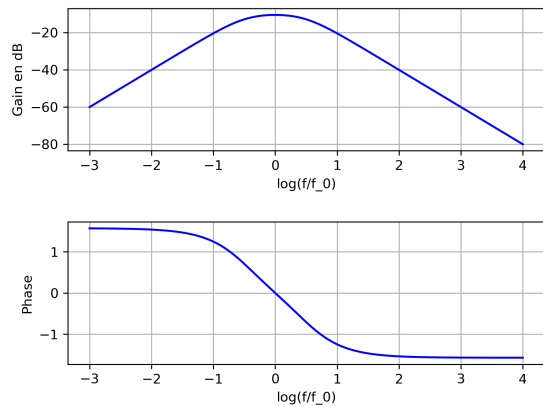
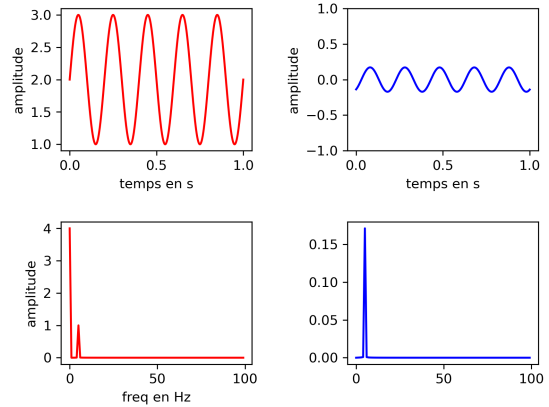
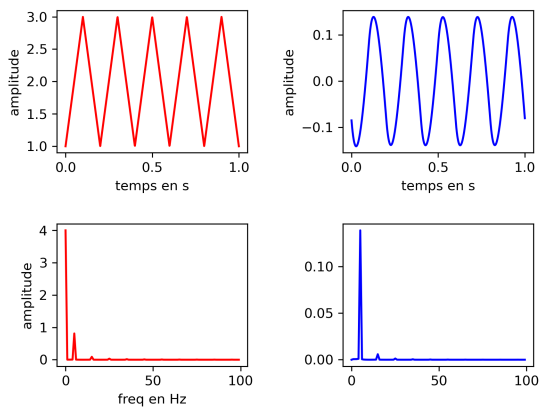
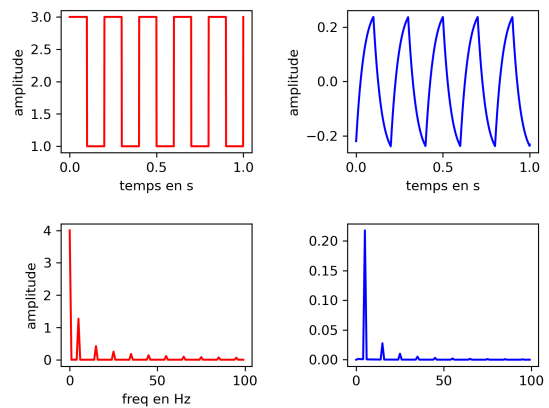
Effet d'un passe bas du premier ordre sur des signaux périodiques



Effet d'un passe haut du premier ordre sur des signaux périodiques

Filtre passe-haut d'ordre 1 $Q=10$ et $f_0 = 5$ Hz sinusFiltre passe-haut d'ordre 1 $Q=10$ et $f_0 = 5$ Hz triangleFiltre passe-haut d'ordre 1 $Q=10$ et $f_0 = 5$ Hz carre

Effet d'un passe bande du deuxième ordre sur des signaux périodiques

Filtre passe-bande Diagramme de Bode du filtre $f_c = 1$ HzFiltre passe-bande $Q=0.3$ et $f_0 = 5$ Hz sinusFiltre passe-bande $Q=0.3$ et $f_0 = 5$ Hz triangleFiltre passe-bande $Q=0.3$ et $f_0 = 5$ Hz carre

Contents

I	Système linéaire continu invariant	1
I.1	Définition	1
I.2	Fonction de transfert opérationnelle d'un système LCI	1
I.3	Stabilité d'un système LCI	3
II	Signaux périodiques	4
II.1	Décomposition d'un signal périodique	4
II.2	Notion de spectre	5
III	Caractère dérivateur ou intégrateur d'un filtre	6
III.1	Caractère dérivateur	6
III.2	Caractère intégrateur	7
IV	Filtrage d'un signal périodique	7
IV.1	Effet des différents filtres sur un signal périodique quelconque	8
IV.2	Effets des filtres usuels sur des signaux périodiques	9