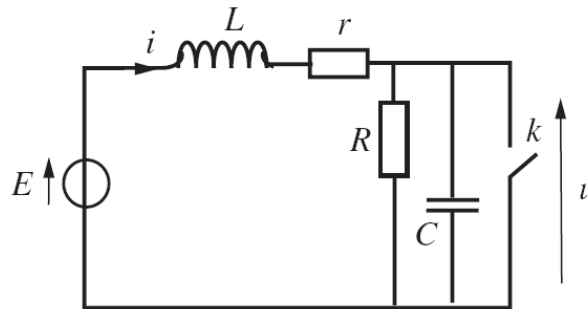


I Régimes transitoires

Soit le montage suivant :



1. On suppose dans un premier temps l'interrupteur k fermé, le condensateur n'étant initialement pas chargé. À l'instant initial, on allume le générateur, aucun courant ne circulant dans le circuit.

1.1 Déterminer i en régime permanent.

1.2 Déterminer $i(t)$.

2. Le régime permanent étant atteint, on ouvre k à l'instant que l'on prendra comme nouvel instant initial.

2.1 Déterminer l'expression de u en régime permanent.

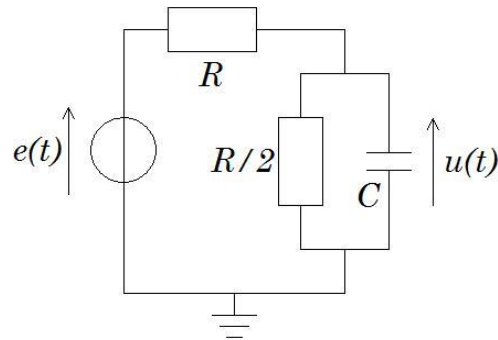
2.2 Montrer que la tension u vérifie l'équation $\ddot{u} + 2\lambda\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u = \frac{E}{LC}$. Exprimer λ et ω_0 .

2.3 Déterminer $u(0^+)$ et $\dot{u}(0^+)$.

2.4 On suppose $\lambda < 1$ et on note $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \lambda^2}$. Résoudre l'équation différentielle pour déterminer $u(t)$.

II Filtrage : worked example

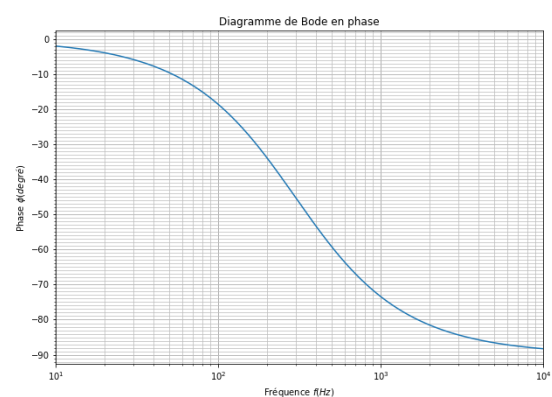
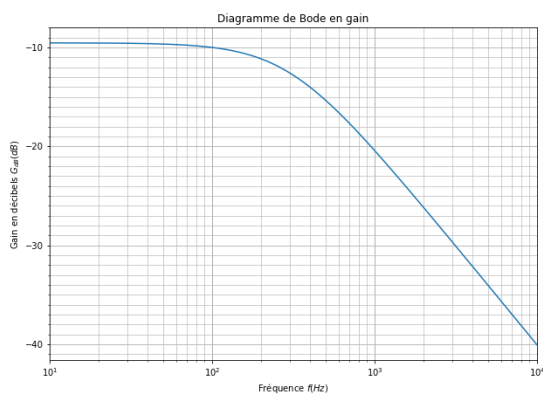
Énoncé : On considère le circuit ci dessous. Le générateur est une source idéale de tension de fém $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$ où E représente la tension efficace. On travaille en notation complexe.



1. Déterminer qualitativement la nature du filtrage réalisé.
2. Calculer la fonction de transfert et la mettre sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

3. Déterminer le module H et le déphasage introduit par le filtre φ .
4. Vérifier à partir de l'expression de H la nature du filtrage réalisé.
5. Établir l'expression littérale de la fréquence de coupure f_c en fonction de R et C .
6. On trace le diagramme de Bode en fonction de la fréquence en échelle semi-log.
- 6.1 On obtient le graphe ci dessous. Déterminer f_c .



- 6.2 En déduire la valeur de C si $R = 1\text{ k}\Omega$.

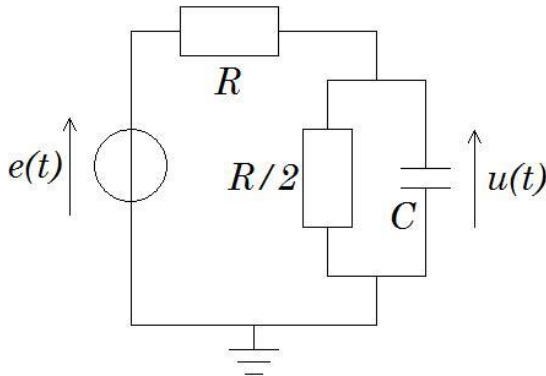
7. Quelle est la fonction réalisée pour $f \gg f_c$?

8. Déterminer l'expression du signal de sortie si l'entrée vaut

$$e(t) = 10 \cos(1800\pi t + \pi/3) + 6$$

Solution :

1.



À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un fil coupé, donc l'intensité qui parcourt R et $R/2$ est la même. On utilise alors un diviseur de tension

$$u_{R/2} = u_C = u = \frac{R/2}{R + R/2} e = 2/3 e$$

qui est non nulle.

À haute fréquence, le condensateur est équivalent à un fil donc $u = 0$. Ce comportement est le comportement d'un filtre passe bas.

2. On calcule l'impédance complexe du dipôle en parallèle

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{2}{R} + jC\omega$$

On reconnait par ailleurs un diviseur de tension

$$\underline{H} = \frac{Z_p}{R + Z_p} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_p}}$$

soit en remplaçant par l'expression de Z_p

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + R\left(\frac{2}{R} + jC\omega\right)} = \frac{1}{1 + 2 + jRC\omega} = \frac{1}{3 + jRC\omega}$$

et en faisant apparaître la forme canonique

$$\underline{H} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{jRC\omega}{3}} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

ce qui donne $H_0 = \frac{1}{3}$ et $\omega_0 = \frac{3}{RC}$.

3. On calcule le module du nombre complexe $\underline{H}$

$$|\underline{H}| = \left| \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \right| = H_0 \frac{1}{\left| 1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \right|} = H_0 \frac{1}{\sqrt{1^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = H_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

puis l'argument

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = \arg(H_0) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = 0 - \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1}\right) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$

4. On calcule les limites haute et basse fréquence de $|\underline{H}|$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \underline{H} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} H_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = H_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{+\infty}{\omega_0^2}}} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H} = \lim_{\omega \rightarrow 0} H_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = H_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{0}{\omega_0^2}}} = 0$$

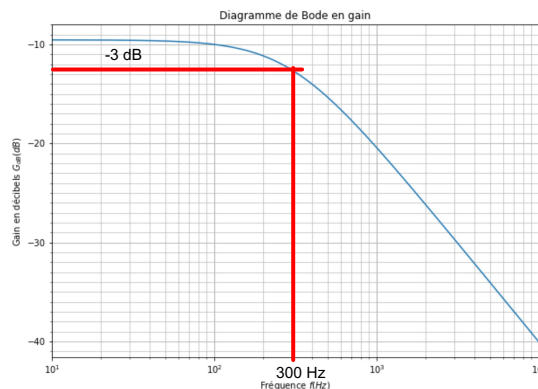
Le filtre est donc effectivement un filtre passe bas.

5. Par définition, la fréquence de coupure est telle que $|\underline{H}|(f_c) = |\underline{H}|_{max}/\sqrt{2}$ donc

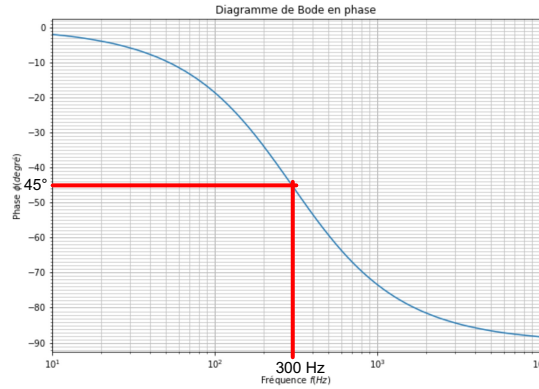
$$|\underline{H}|(f_c) = H_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_c^2}{f_0^2}}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{f_c^2}{f_0^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{f_c^2}{f_0^2} = 1$$

donc $f_c = f_0$.

6.1 La courbe de gain est en échelle logarithmique, et une division par $\sqrt{2}$ correspond à une atténuation de 3 dB , car $20 \log(\sqrt{2}) = -3\text{ dB}$, donc



On peut aussi utiliser la courbe de déphasage car $f_c = f_0$ implique $\omega_c = \omega_0$. À la fréquence de coupure, on a donc $\varphi = -\arctan 1 = -45^\circ$



6.2 La fréquence f_0 mesurée vaut $f_0 = 300 \text{ Hz}$, donc

$$f_0 = 2\pi\omega_0 = \frac{6\pi}{RC} \Rightarrow C = \frac{6\pi}{Rf_0} \simeq \frac{6 \cdot 3}{10^3 \cdot 3 \cdot 10^2} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ F}$$

7. La fonction de transfert s'écrit dans la limite $f \gg f_c$

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \simeq H_0 \left(\frac{\omega_0}{j\omega} \right)$$

et est donc proportionnelle à $1/(j\omega)$. Ce comportement est analogue à l'opération d'intégration effectuée sur un signal sinusoïdal $e(t) = A \exp(j\omega t)$

$$\int e(t) dt = \frac{A}{j\omega} \exp(j\omega t)$$

Le filtre a donc un caractère intégrateur.

8. On connaît $C = 6 \cdot 10^{-5} \text{ F}$ et $R = 1 \text{ k}\Omega$, par ailleurs $f_0 = 300 \text{ Hz}$. Le signal d'entrée est de la forme $e(t) = A \cos(2\pi ft + \phi) + B$. Le terme B correspond à la fréquence nulle, et le terme d'amplitude A a pour fréquence $f = 900 \text{ Hz}$, donc

$$\underline{s}(t) = \underline{H}(f)A \exp(j2\pi ft + j\phi) + \underline{H}(0)B = \underline{H}(f)A \exp(j2\pi ft + j\phi) + \frac{1}{3}6 = \underline{H}(f)A \exp(j2\pi ft + j\phi) + 2$$

Pour le premier terme, il est plus facile de raisonner séparément sur l'amplitude et sur l'argument. Pour l'amplitude, on applique le gain

$$A_s = AH_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_0^2}}} = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{900^2}{300^2}}} = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 1$$

Pour la phase on applique le ... déphasage du filtre !

$$\phi_s = \phi + \varphi = \frac{\pi}{3} - \arctan \frac{f}{f_0} = \frac{\pi}{3} - \arctan 3 = 1,05 - 1,25 = -0,2 \text{ rad}$$

ce qui donne finalement

$$\underline{s}(t) = \exp(j2\pi ft - 0,2j) + 2$$

et en notation réelle

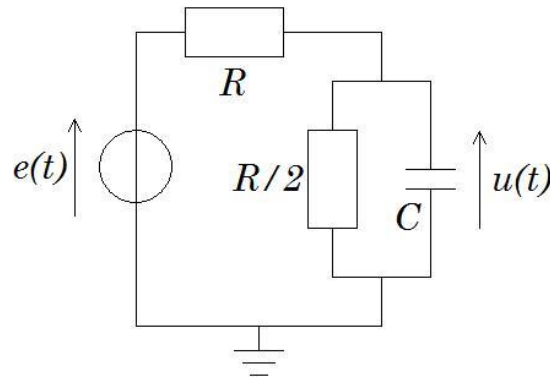
$$s(t) = \cos(1800\pi t - 0,2) + 2$$

Questions :

- A.** Dessiner les circuit équivalents à haute et basse fréquence. Pourquoi $u_{R/2} = u_C = u$?
- B.** Pourquoi est-il intéressant d'écrire $H = \frac{Z_p}{R+Z_p} = \frac{1}{1+\frac{R}{Z_p}}$? Pourquoi mettre 1/3 en facteur ?
- C.** Quel est le module du nombre complexe $z = a + ib$? Quel est son argument ?
- D.** Quelle est la limite de ω^2/ω_0^2 quand $\omega \rightarrow +\infty$? Même question pour $\omega \rightarrow 0$.
Il y a une erreur dans la réponse à la question 4., corriger l'erreur.
- E.** Quelle est la relation entre f et ω ?
- F.** Dans la question 6.1, quelle est la méthode la plus simple ? la plus précise ?
- G.** Question 6.2 : commenter la valeur de C .
- H.** Question 7 : que signifie caractère intégrateur ?

III Filtrage

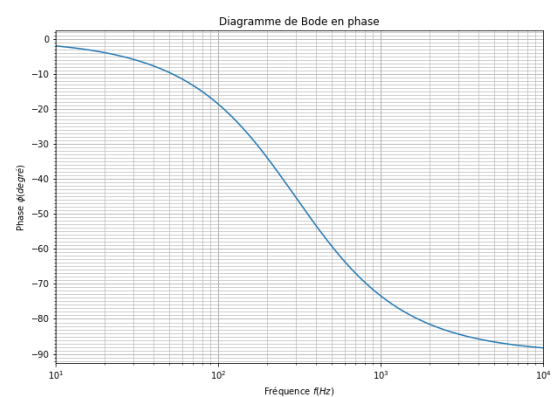
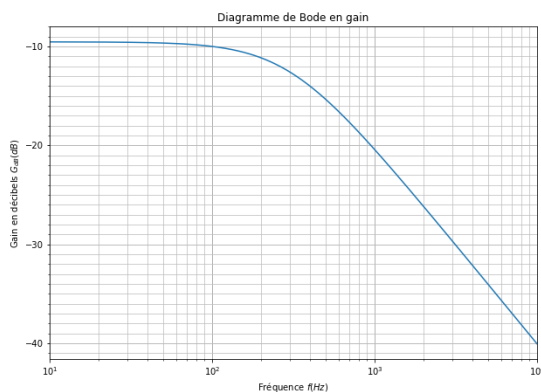
On considère le circuit ci dessous. Le générateur est une source idéale de tension de fém $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$ où E représente la tension efficace. On travaille en notation complexe.



1. Déterminer qualitativement la nature du filtrage réalisé.
2. Calculer la fonction de transfert et la mettre sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

3. Déterminer le module H et le déphasage introduit par le filtre φ .
4. Vérifier à partir de l'expression de H la nature du filtrage réalisé.
5. Établir l'expression littérale de la fréquence de coupure f_c en fonction de R et C .
6. On trace le diagramme de Bode en fonction de la fréquence en échelle semi -log.
- 6.1 On obtient le graphe ci dessous. Déterminer f_c .



6.2 En déduire la valeur de C si $R = 1\text{ k}\Omega$.

7. Quelle est la fonction réalisée pour $f \gg f_c$?

8. Déterminer l'expression du signal de sortie si l'entrée vaut

$$e(t) = 10 \cos(1800\pi t + \pi/3) + 6$$

IV PTA-2021

C.II.1. Étude du filtre

Sur la Figure F9 on donne le schéma d'un filtre. On note $\underline{H}_F(\omega)$ sa fonction de transfert.

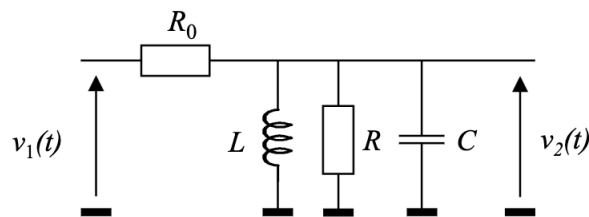


Figure F9. Schéma du filtre.

Q45. Déterminer l'expression de $\underline{H}_F(\omega)$ et la mettre sous la forme $\underline{H}_F = \frac{H_0}{1 + jQ_F \left[x - \frac{1}{x} \right]}$ avec

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 \text{ étant la pulsation propre du filtre.}$$

Expliciter littéralement Q_F , H_0 et la fréquence caractéristique f_0 .

Q46. Donner l'expression reliant le facteur de qualité, la fréquence propre et la bande passante à -3 dB.

On choisit $R_0 = 470\ \Omega$, $R = 120\ \Omega$, $L = 50\ \mu\text{H}$ et $C = 50\ \text{nF}$ de sorte que : $H_0 \approx 0,2$, $f_0 \approx 100\ \text{kHz}$ et $Q_F \approx 3$.

Q47. Faire une représentation graphique approchée du gain en décibel G_{dB} en fonction de $\log(x)$; préciser quelques valeurs sur ce graphe. Faire apparaître sur ce graphe la "bande passante à -3 dB".