

Flexion

1 DÉFINITION

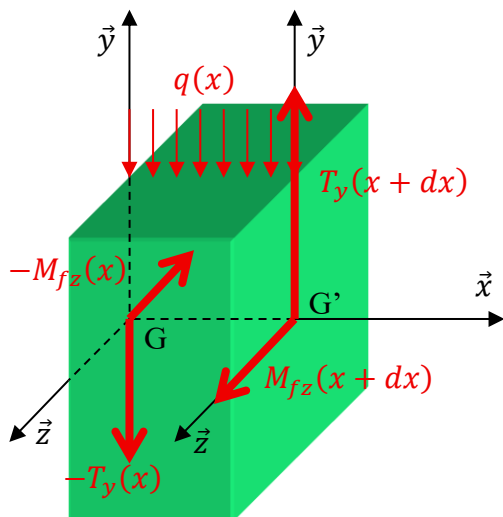
On dit qu'une poutre est sollicitée en flexion simple si le torseur des efforts de cohésion s'écrit au point G, barycentre d'une section droite quelconque :

$$\{\mathcal{T}_{cohésion}\}_G = \begin{Bmatrix} T_y \cdot \vec{y} + T_z \cdot \vec{z} \\ M_{Fy} \cdot \vec{y} + M_{Fz} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$$

On se placera dans la suite du cours dans le cadre des hypothèses supplémentaires suivantes :

- la poutre est droite et sa longueur est grande devant ses dimensions transverses
- le système de force est coplanaire et perpendiculaire à l'axe de la poutre
- l'intersection du plan de charge avec une section droite est un axe de symétrie ou un axe principal de la section

2 RELATION ENTRE L'EFFORT TRANCHANT ET LE MOMENT FLÉCHISSANT



Soient :

- un élément de poutre de longueur dx
- $q(x)$ la répartition de charge
- $T_y(x)$ l'effort tranchant en G d'abscisse x
- $T_y(x+dx)$ l'effort tranchant en G' d'abscisse $x+dx$
- $M_{fz}(x)$ le moment fléchissant en G
- $M_{fz}(x+dx)$ le moment fléchissant en G'

sur dx on peut considérer $q(x)$ constant

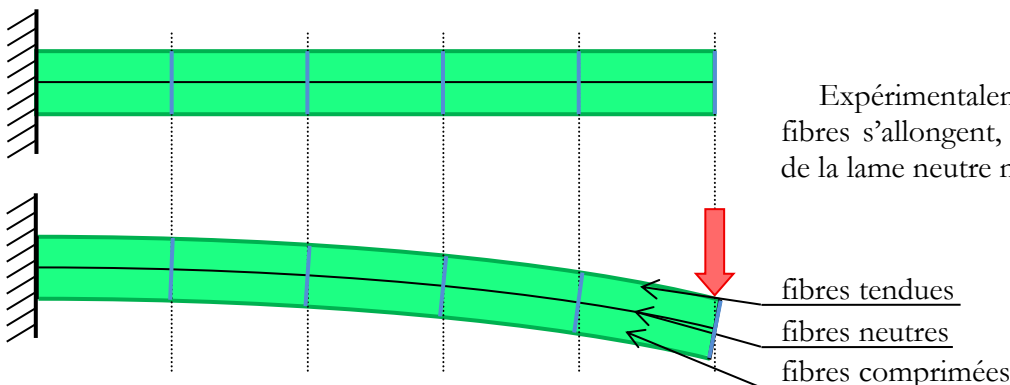
Le théorème du moment statique en G' projeté sur $\vec{z}$ donne :

$$M_{fz}(x+dx) - M_{fz}(x) + dx \cdot T_y(x) - q(x) \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

soit en négligeant le terme en $\frac{dx^2}{2}$: $dM_{fz} + T_y \cdot dx = 0$

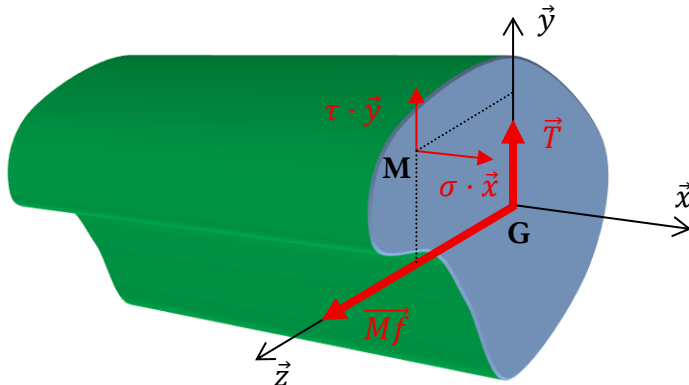
soit : $\boxed{\frac{dM_{fz}}{dx} = -T_y}$ de même on peut démontrer que : $\boxed{\frac{dM_{fy}}{dx} = T_z}$

3 ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE



Expérimentalement on s'aperçoit que certaines fibres s'allongent, d'autres se raccourcissent, celles de la lame neutre ne varient pas.

On coupe la poutre par un plan perpendiculaire à son axe et on isole la partie de gauche.



$$\overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{C_{(M)}} = \begin{pmatrix} \sigma_{(M)} \\ \tau_{y(M)} \\ \tau_{z(M)} \end{pmatrix}$$

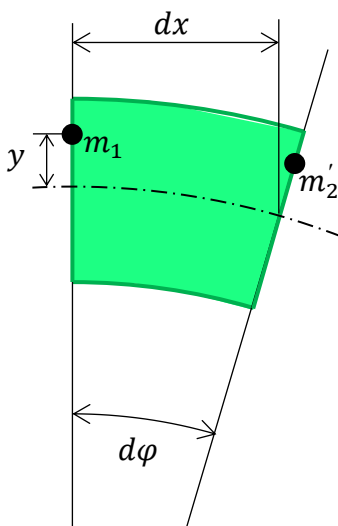
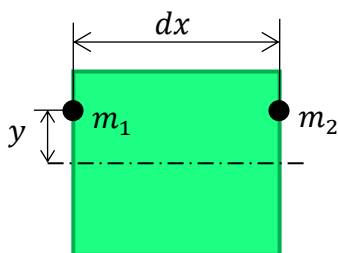
$$\overrightarrow{R_{cohésion}} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{M_{cohésion/G}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{Fz} \end{pmatrix}$$

En utilisant les relations entre le torseur de cohésion et le vecteur contrainte on détermine :

$$\overrightarrow{R_{cohésion}} = T_y \cdot \vec{y} = \int_{M \in S} \overrightarrow{C_{(M)}} \cdot dS = \int_{M \in S} (\sigma \cdot \vec{x} + \tau_y \cdot \vec{y} + \tau_z \cdot \vec{z}) \cdot dS \Rightarrow \begin{cases} \int_{M \in S} \sigma_{(M)} \cdot dS = 0 \\ \int_{M \in S} \tau_{y(M)} \cdot dS = T_y \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_{cohésion/G}} = M_{Fz} \cdot \vec{z} = \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{C_{(M)}} \cdot dS = \int_{M \in S} \begin{pmatrix} 0 \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sigma_{(M)} \\ \tau_{y(M)} \\ \tau_{z(M)} \end{pmatrix} \cdot dS \Rightarrow \int_{M \in S} -\sigma_{(M)} \cdot y_M \cdot dS = M_{Fz}$$

4 CONTRAINTE NORMALE



On étudie une tranche dx de poutre sollicitée en flexion.

Soit R le rayon de courbure, $R = \frac{dx}{d\varphi}$

On applique la loi de Hooke à la fibre $m_1 m_2$:

$$\sigma_{(M)} = E \cdot \varepsilon_{(M)} = E \cdot \frac{m_2 m_2'}{m_1 m_2} \text{ et } |m_2 m_2'| = |y_M \cdot d\varphi|$$

on a $m_2 m_2' > 0$ quand $y_M > 0$ et $d\varphi < 0$ donc $m_2 m_2' = -y_M \cdot d\varphi$

$$\text{alors } \sigma_{(M)} = -E \cdot \frac{y_M \cdot d\varphi}{dx} \text{ soit } \sigma_{(M)} = -E \cdot y_M \cdot \frac{1}{R}$$

$$M_{Fz} = \int_S -\sigma_{(M)} \cdot y_M \cdot dS \text{ or } \sigma_{(M)} = -E \cdot y_M \cdot \frac{1}{R} \text{ donc}$$

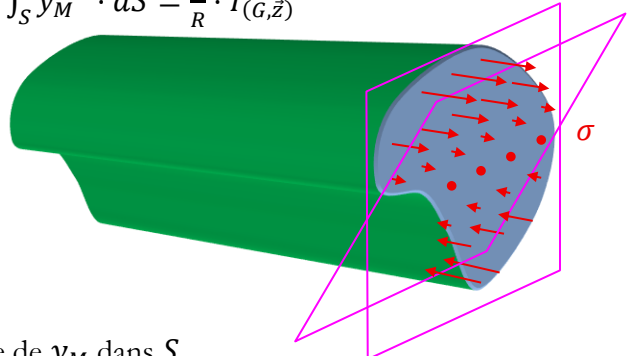
$$M_{Fz} = \int_S E \cdot y_M^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot dS = \frac{E}{R} \cdot \int_S y_M^2 \cdot dS = \frac{E}{R} \cdot I_{(G, \vec{z})}$$

$$\text{d'où } R = \frac{E \cdot I_{(G, \vec{z})}}{M_{Fz}}$$

$$\text{soit } \boxed{\sigma_{(M)} = -\frac{M_{Fz}}{I_{(G, \vec{z})}} \cdot y_M}$$

remarques :

- σ est une fonction linéaire de y_M dans S
- 2 fibres symétriques par rapport à la fibre neutre ont même $|\sigma|$
- la lame neutre est confondue avec la lame moyenne



La contrainte tangentielle n'est pas nulle dans le cas de la flexion mais sa détermination est hors programme.

5 CONDITION DE RÉSISTANCE

Écrire une condition de résistance, c'est exprimer le fait que la contrainte reste inférieure à la résistance pratique correspondante. Dans le cas de la flexion, la contrainte est la contrainte normale et la résistance pratique est la résistance pratique en extension et la résistance pratique en compression.

Condition de résistance en flexion : $\boxed{-Rp(c) \leq \sigma \leq Rp(e)}$

or pour une section donnée, σ est extrémal pour y extrémal :

pour la fibre la plus tendue $\boxed{\frac{|M_{Fz}|}{\frac{I_{(G,\vec{z})}}{y_{max}^{extension}}} \leq \frac{Re(e)}{s}}$ pour la fibre la plus comprimée $\boxed{\frac{|M_{Fz}|}{\frac{I_{(G,\vec{z})}}{y_{max}^{compression}}} \leq \frac{Re(c)}{s}}$

6 MODIFICATION DE LA GÉOMÉTRIE

a) Ligne moyenne

On appelle déformée l'équation de la fibre neutre de la poutre sollicitée en flexion, notée $v(x)$.

On a précédemment déterminé une relation entre le rayon de courbure de la fibre neutre de la poutre

et le moment fléchissant : $R = \frac{E \cdot I_{(G,\vec{z})}}{M_{Fz}}$ or en coordonnées cartésiennes : $R = \frac{(1+v'^2)^{\frac{3}{2}}}{v''}$

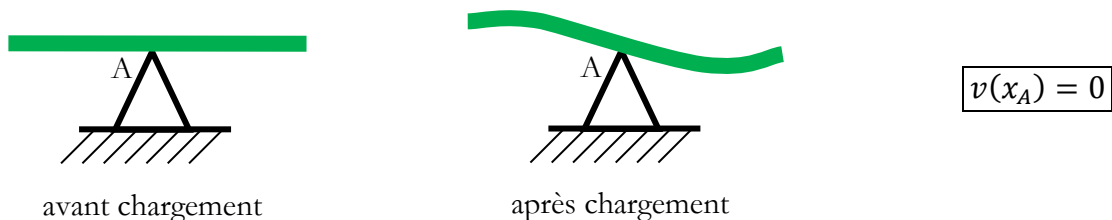
Les déformations sont supposées petites donc $v' \ll 1$, en effet v' correspond à la pente de la ligne moyenne de la poutre ; donc $R \approx \frac{1}{v''}$

soit : $\boxed{M_{Fz} = E \cdot I_{(G,\vec{z})} \cdot v''}$ ou $\boxed{v'' = \frac{M_{Fz}}{E \cdot I_{(G,\vec{z})}}}$

Pour déterminer l'équation de la déformée on intègre cette relation deux fois en tenant compte des conditions aux limites :

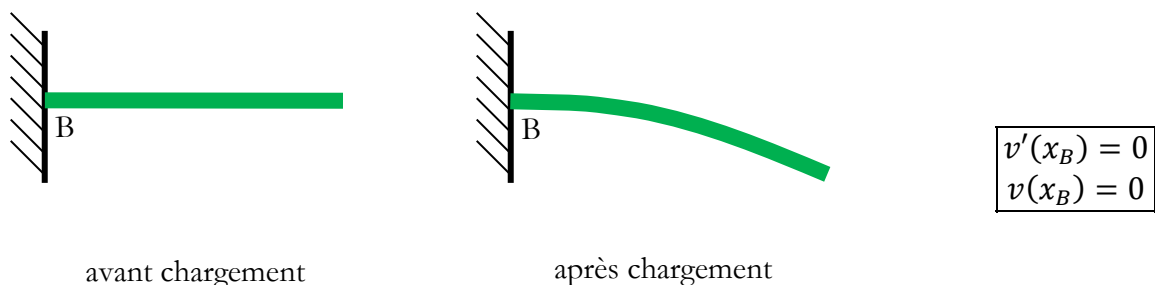
▪ appui rigide en x_A :

Si une poutre est sur un appui rigide, la déformée en cette abscisse est nulle.



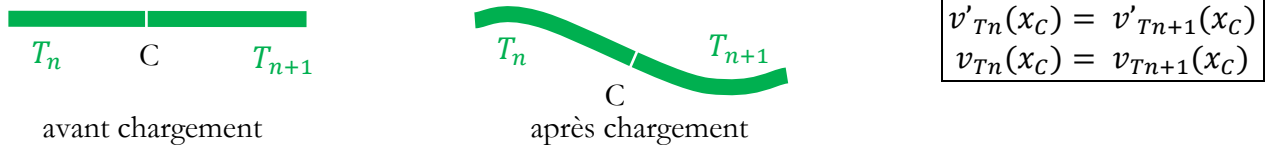
▪ encastrement en x_B :

Si une poutre est encastree, la déformée **et** la pente en cette abscisse sont nulles.

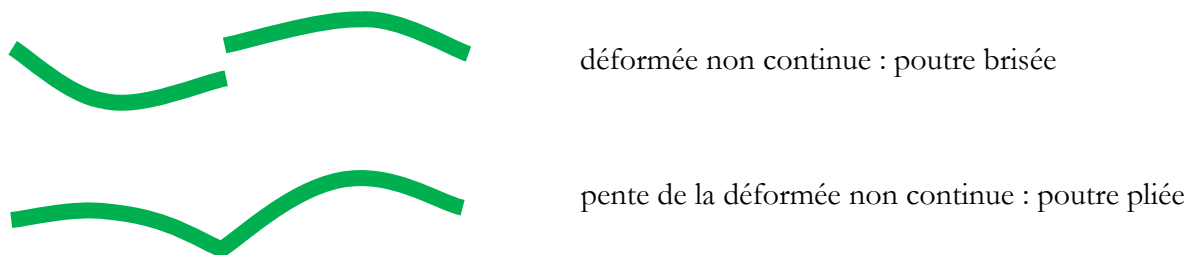


- raccordement $\mathcal{C}^1$ des tronçons T_n et T_{n+1} en x_C :

L'équation de la déformée v est une fonction $\mathcal{C}^1$, si l'expression de la déformée est définie par morceaux alors la limite de v à gauche et à droite de ce point de raccordement sont égales, et la limite de v' à gauche et à droite de ce point de raccordement sont égales.

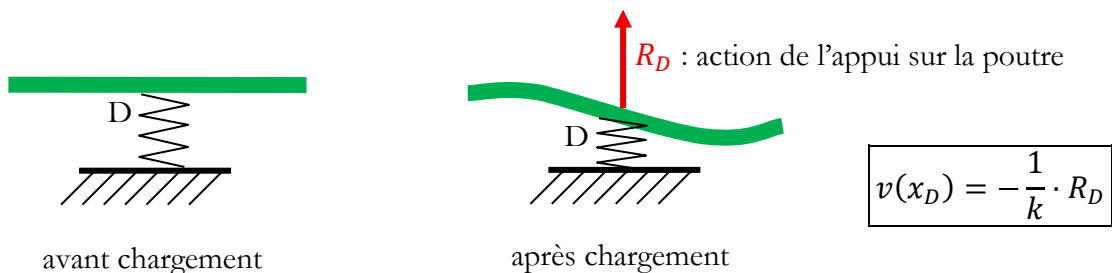


Le caractère $\mathcal{C}^1$ de la déformée traduit le comportement de la poutre en flexion, elle n'est ni brisée ni pliée :



- appui élastique (réaction R_D et raideur k) en x_D :

Si une poutre est sur un appui élastique, la déformée en cette abscisse est proportionnelle à l'effort sur cet appui.



b) Section

La géométrie de la section est très légèrement modifiée mais sa détermination est hors programme.

c) Torseur des petits déplacements et torseur des déformations

Les déplacements étant très petits devant les dimensions de la poutre, on peut définir un torseur des petits déplacements des points de la section d'abscisse x pour calculer le déplacement de tout point de la poutre.

Soit G le barycentre de la section d'abscisse x : $\{u_{s(x)}\}_G = \begin{cases} \overrightarrow{\theta(x)} = v'(x) \cdot \vec{z} \\ \overrightarrow{u(G)} = v(x) \cdot \vec{y} \end{cases}$

On définit alors le torseur des déformations des points de la section d'abscisse x qui permet de déterminer la déformation (donc la contrainte) en tout point de la poutre.

Soit G le barycentre de la section d'abscisse x : $\{Def_{s(x)}\}_G = \begin{cases} v''(x) \cdot \vec{z} \\ v'(x) \cdot \vec{y} \end{cases}$