ASSERVISSEMENT : MODELES DE BASE

1 – SYSTEME DE PREMIER ORDRE.

1.1 – Définition.

On appelle système du premier ordre, tout système dont le fonctionnement est régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre.

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t) \qquad \text{avec } K > 0 \text{ et } \tau > 0$$

Cela donne comme fonction de transfert (dans le domaine de Laplace et Heaviside vérifié) :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau.p} \qquad \text{avec } K \text{ gain statique et } \tau \text{ constante de temps}$$

1.2 – Réponse temporelle à un échelon.

Soit un échelon $e(t) = E_0$ qui s'écrit dans Laplace : $E(p) = \frac{E_0}{p}$

La sortie vaut donc : $S(p) = \frac{K.E_0}{p(1+\tau p)}$

La décomposition en éléments simple donne :

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p(1+\tau p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(1+\tau p)} = K.E_0.\left(\frac{1}{p} + \frac{\tau}{(1+\tau p)}\right) = K.E_0.\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau} + p\right)}\right)$$

La transformée inverse de Laplace faite, on obtient : $s(t) = K.E_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

On peut calculer l'erreur statique :

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty}[e(t) - s(t)]$$

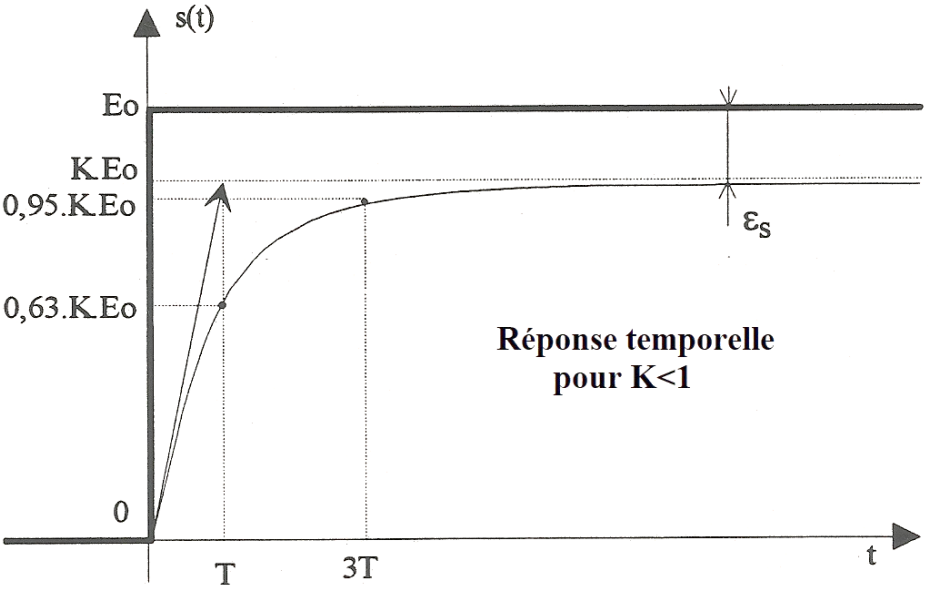
Théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p.\left[\frac{E_0}{p} - H(p).E(p)\right]$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p.\left[\frac{E_0}{p} - \frac{K.E_0}{p(1+\tau p)}\right]$$

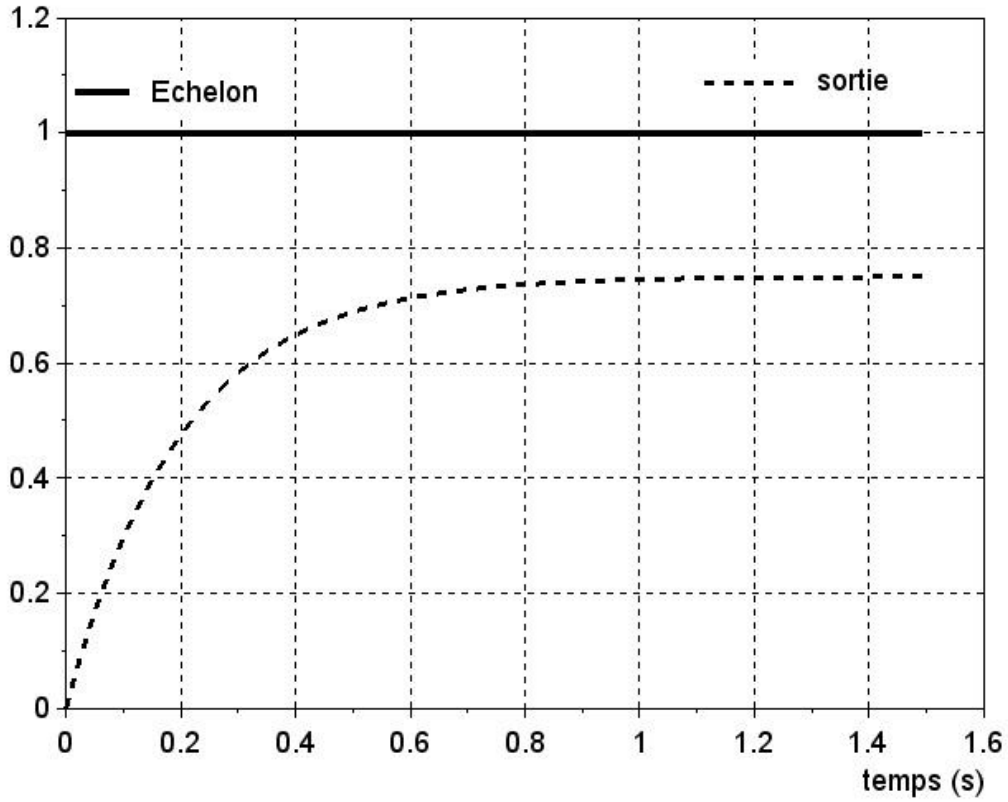
$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} E_0.\left[1 - \frac{K}{(1+\tau p)}\right]$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} E_0.[1 - K]$$



On en conclut qu'un système de FTBF du premier ordre dont le gain statique est égal à 1 (mais en fait, quel que soit son ordre !!) aura une erreur statique nulle : $\varepsilon_s = 0$

1.3 – Identification à partir d'une réponse temporelle à un échelon.



Les coefficients de ce système du premier ordre sont :

$K =$

$\tau =$

1.4 –Réponse harmonique (ou fréquentielle) d'un système du premier ordre.

L'analyse harmonique consiste à soumettre mathématiquement notre système à toutes les fréquences (en entrée) pour en déduire sa réponse (en sortie) pour chacune des fréquences.

La variation de la fréquence d'entrée est incarnée par la variable ω (de jω), on va regarder :

- 20log (du gain (sortie/entrée)) (en dB) pour chaque ω.
- L'argument du signal de sortie / à celui d'entrée (en rd) pour chaque ω (déphasage).

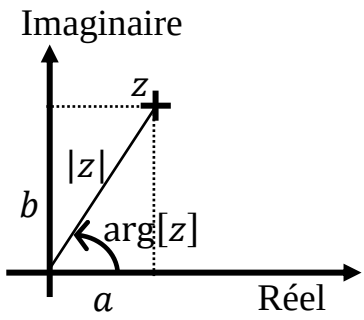
Préambule mathématique : Rappel sur les nombres complexes :

$z = a + ib$ avec a la partie réelle et b la partie imaginaire

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est son module

Avec $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$ et $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$\arg[z] = \arctan\frac{b}{a}$ est son argument



Et $\arg[z_1.z_2] = \arg[z_1] + \arg[z_2]$ et $\arg\left[\frac{z_1}{z_2}\right] = \arg[z_1] - \arg[z_2]$

Préambule mathématique : Rappel sur des propriétés de la fonction log :

$\log(x.y) = \log(x) + \log(y)$ et $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

La FT se présente ainsi : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{(1+\tau p)}$ soit $H(j\omega) = \frac{K}{(1+\tau.j\omega)}$

Analyse des gains et tracé du diagramme des gains pour Bode :

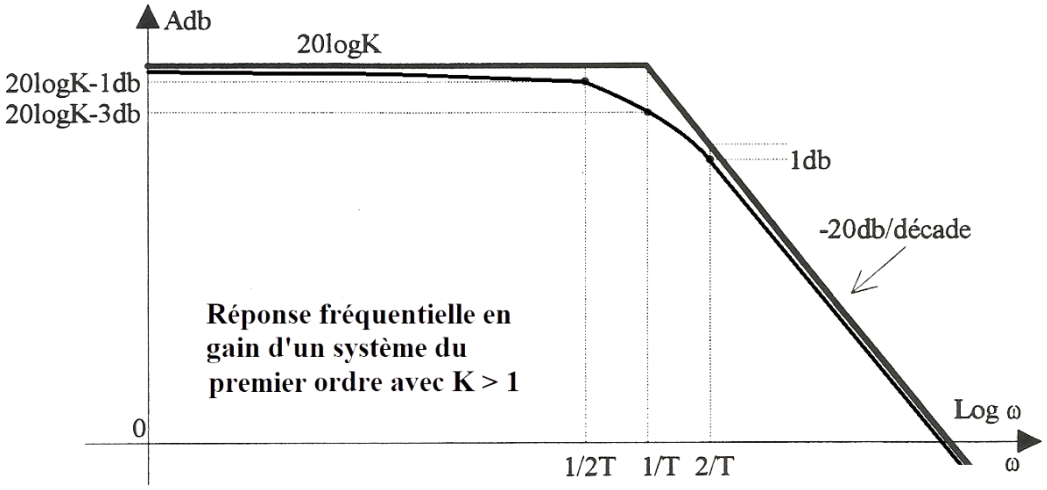
$$A_{dB}(\omega) = 20\log|H(j\omega)| = 20\log\left|\frac{K}{(1+\tau.j\omega)}\right| = 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\right)$$

$$A_{dB}(\omega) = 20\log K - 20\log|(1+\tau.j\omega)| = 20\log K - 20\log\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$$

$\omega \to 0$ $A_{dB}(\omega) = 20\log K$ C'est une droite horizontale

$\omega \to \infty$ $A_{dB}(\omega) = 20\log K - 20\log\tau.\omega$ soit $A_{dB}(\omega) = 20\log\frac{K}{\tau} - 20\log\omega$

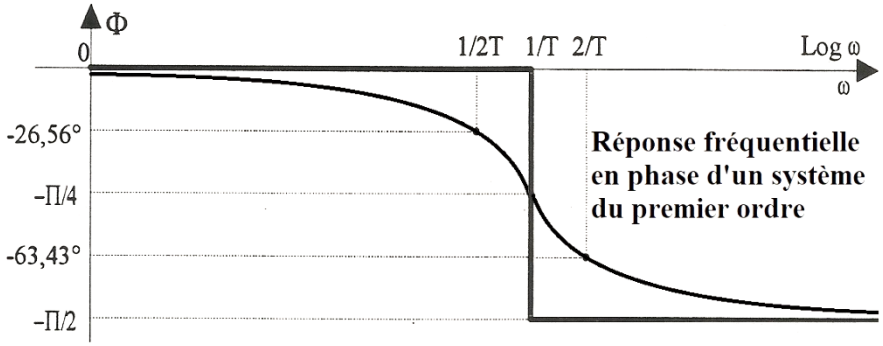
C'est une droite de pente négative (– 20 dB/déc) croisant la précédente droite en $\omega = {}^{1}/_{\tau}$



Analyse des phases et tracé du diagramme des phases pour Bode :

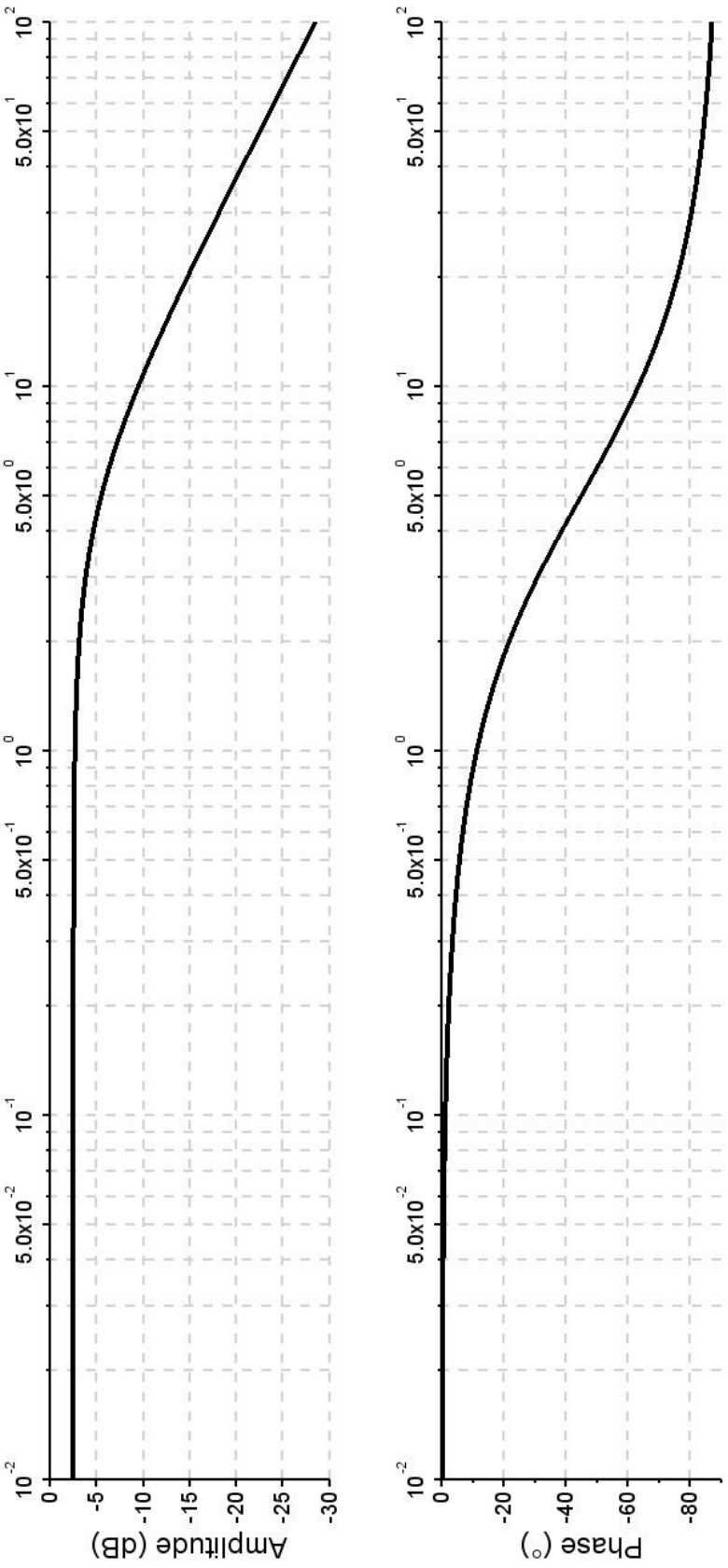
La phase est donnée par l'argument de $H(j\omega)$

$$\Phi = arg[H(j\omega)] = arg\left[\frac{K}{(1+\tau.j\omega)}\right] = arg[K] - arg[(1+\tau.j\omega)] = -\arctan\tau.\omega$$



1.5 – Identification à partir d'une réponse fréquentielle d'un premier ordre.

Les coefficients de ce système du premier ordre sont :



$K =$

$\tau =$

2 – SYSTEME DU SECOND ORDRE.

2.1 – Définition.

On appelle système du second ordre, tout système dont le fonctionnement est régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre.

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2z}{\omega_n}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K.e(t) \qquad \text{avec } K>0, f>0 \text{ et } \omega_n>0$$

Cela donne comme fonction de transfert (dans le domaine de Laplace et Heaviside vérifié) :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2z.p}{\omega_n}+\frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

où
- ω_n est la pulsation propre non amortie.
- $z, m \text{ ou } \xi$ est le coefficient d'amortissement.
- K est le gain statique

2.2 – Réponse temporelle à un échelon.

Echelon : $E(p)=\frac{E_0}{p}$ en entrée donne en sortie : $$S(p)=\frac{K.E_0}{p\left(1+\frac{2z.p}{\omega_n}+\frac{p^2}{\omega_n^2}\right)}$$

Pour trouver la réponse temporelle, il faut donc :
- Décomposer en élément simple (somme de fraction rationnelles) la fonction $S(p)$.
- Retourner au domaine temporel par une transformée inverse de Laplace.

Mais cette décomposition sous forme de fraction rationnelles sera complètement différente selon l'équation caractéristique de $H(p)$.
C'est la nature des racines de l'équation caractéristique qui va déterminer la décomposition et par là même le type de réponse temporelle.

- L'équation caractéristique : $$r^2+\frac{2z}{\omega_n}.r+\frac{1}{\omega_n^2}=0$$

- Discriminant Δ de l'équation : $$\Delta=\left(\frac{2z}{\omega_n}\right)^2-4\frac{1}{\omega_n^2}=\frac{4}{\omega_n^2}(z^2-1)$$

  - Si $z>1$ alors $\Delta>0$ et les 2 racines réelles sont : $r_{1,2}=-\omega_n\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right)$

    $$S(p)=\frac{K.E_0}{p(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)} \text{ avec } \tau_i=\frac{1}{\omega_n\left(z\pm\sqrt{z^2-1}\right)}$$

    $$s(t)=K.E_0\left(1+\frac{1}{(\tau_2-\tau_1)}\left[\tau_1.e^{\frac{-t}{\tau_1}}-\tau_2.e^{\frac{-t}{\tau_2}}\right]\right)$$

  - Si $z=1$ alors $\Delta=0$ et la racine réelle double est : $r=-\omega_n$

    $$S(p)=\frac{K.E_0}{p(1+\tau.p)} \text{ avec } \tau=\frac{1}{\omega_n} \text{ et donc } s(t)=K.E_0\left(1-e^{\frac{-t}{\tau}}-\frac{t}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

    Remarque : On obtient 95 % de la réponse pour $t\simeq 4{,}7.\tau$

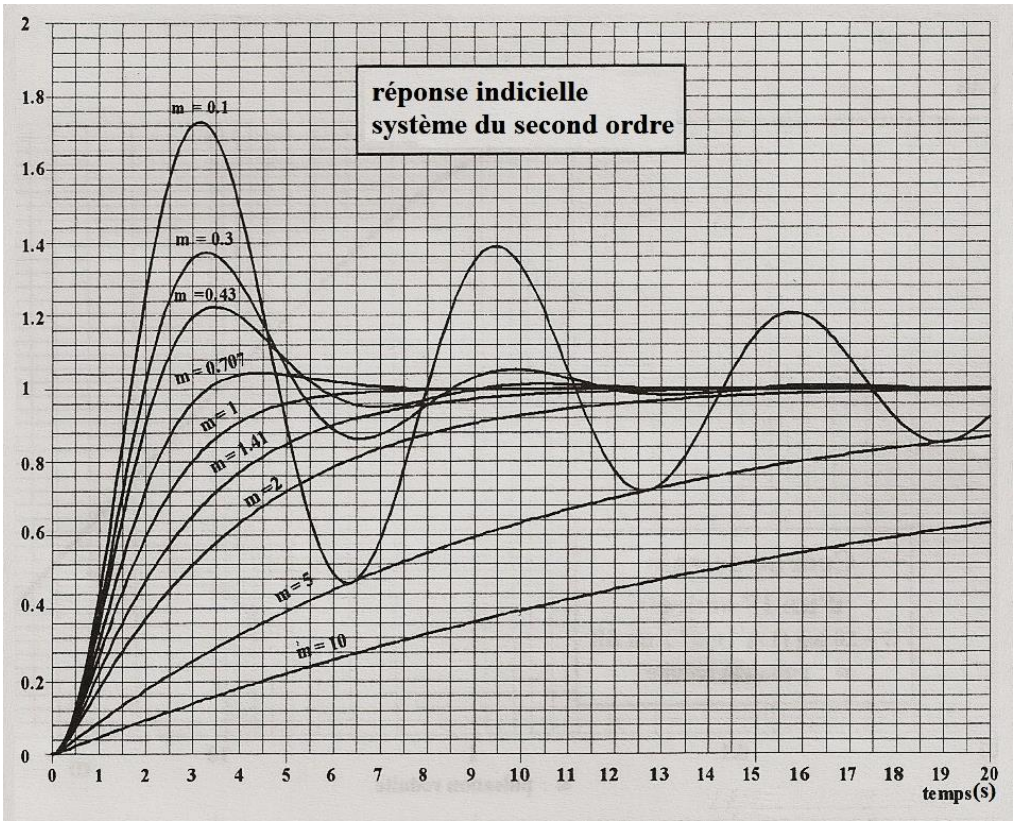
- Si $z < 1$ alors $\Delta < 0$ et les 2 racines complexes sont : $r_{1,2} = -\omega_n\left(z \pm j.\sqrt{1-z^2}\right)$

$$S(p) = \frac{K.E_0}{p\left(1 + \frac{2z.p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}\right)}$$

$$s(t) = KE_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z.\omega_n.t}.sin\left[\omega_n.\sqrt{1-z^2}.t - \arctan\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)\right]\right)$$

On remarque la pseudo-période $\omega_p = \omega_n.\sqrt{1-z^2}$ déphasée de $\arctan\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$

La réponse temporelle indicielle (à un échelon de 1) est représentée sur la figure pour une fonction de transfert du second ordre avec K=1, $\omega_n = 1\ rd/s$ et différentes valeurs de z, (m).



Temps de réponse pour z = 1 ?

$T_{r5\%}(z1) =$

Temps de réponse pour z = 0,3 ?

$T_{r5\%}(z0{,}3) =$

Pseudo-période pour z = 0,1 ?

$\omega_p(z0{,}1) =$

Calcul de $T_{r5\%}(z0{,}1)$

$T_{r5\%}(z0{,}1) =$

On peut noter sur les différentes courbes :

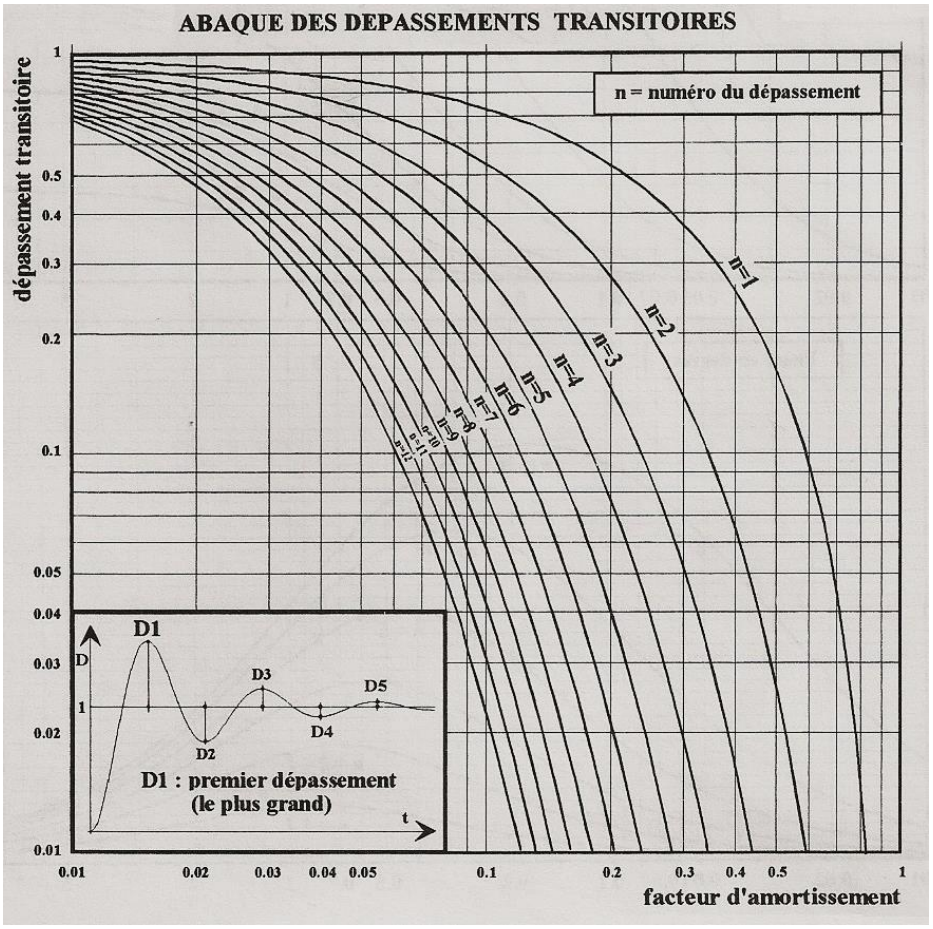
- ✓ La réponse apériodique pour le z > 1.
  C'est une réponse sans dépassement presque semblable (sauf que la pente à l'origine est nulle) à celle d'un premier ordre. D'ailleurs plus le z est important plus $\tau_1 > \tau_2$et plus il ressemblera à un premier ordre de constante de temps τ_1. On peut parler de pôle dominant.
- ✓ La réponse apériodique critique pour le z = 1.
  C'est juste la transition entre les deux régimes pour le cas particulier de z=1
- ✓ La réponse oscillante pour le z < 1.
  On remarque que la réponse n'est visiblement oscillante que pour z < 0,7, et que l'on peut voir les pseudo-périodes de la réponse.
  Si jamais $z \rightarrow$ vers 0 alors $\omega_p \simeq \omega_n\ et\ T_{r5\%}$ devient ∞ (oscillateur pur)

Avec de savants calculs mathématiques, on peut trouver les expressions donnant le énième dépassement et donc plus simplement le premier dépassement :

$$D_n(\%) = e^{\frac{-n.\pi.z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

$$D_1(\%) = e^{\frac{-\pi.z}{\sqrt{1-z^2}}}$$

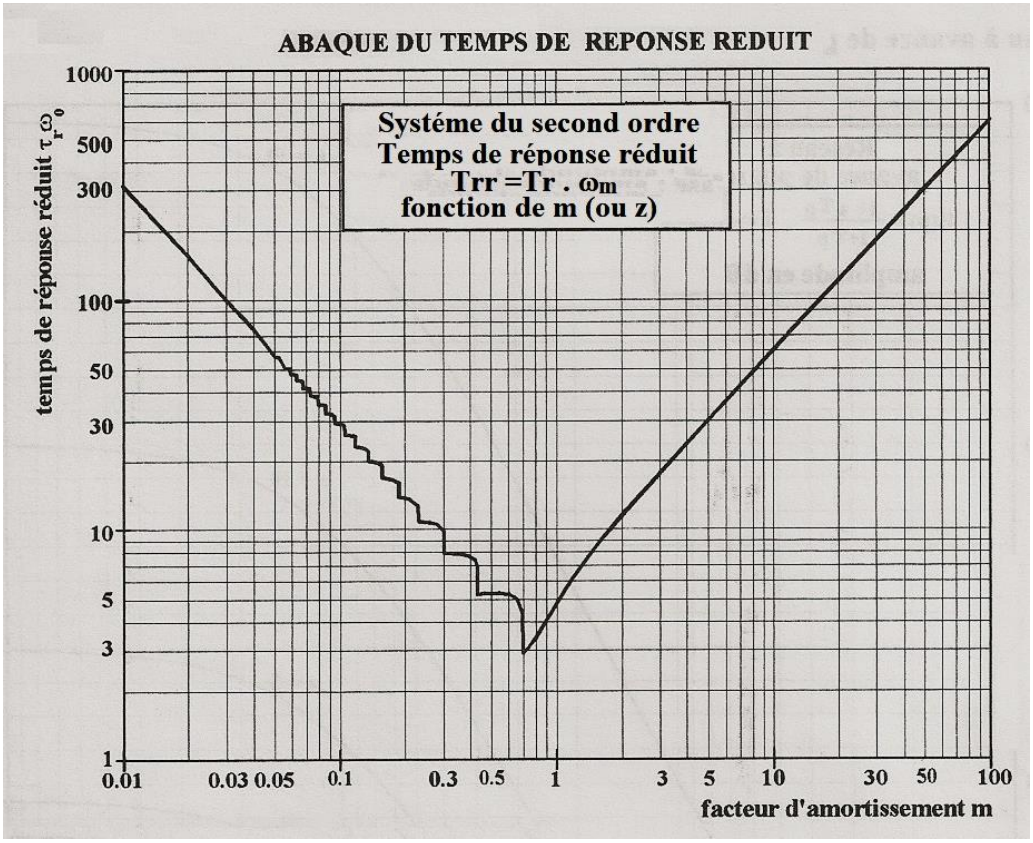
On peut alors mettre ces expressions sous forme d'abaque, qui nous sera très utile lors d'indentification.



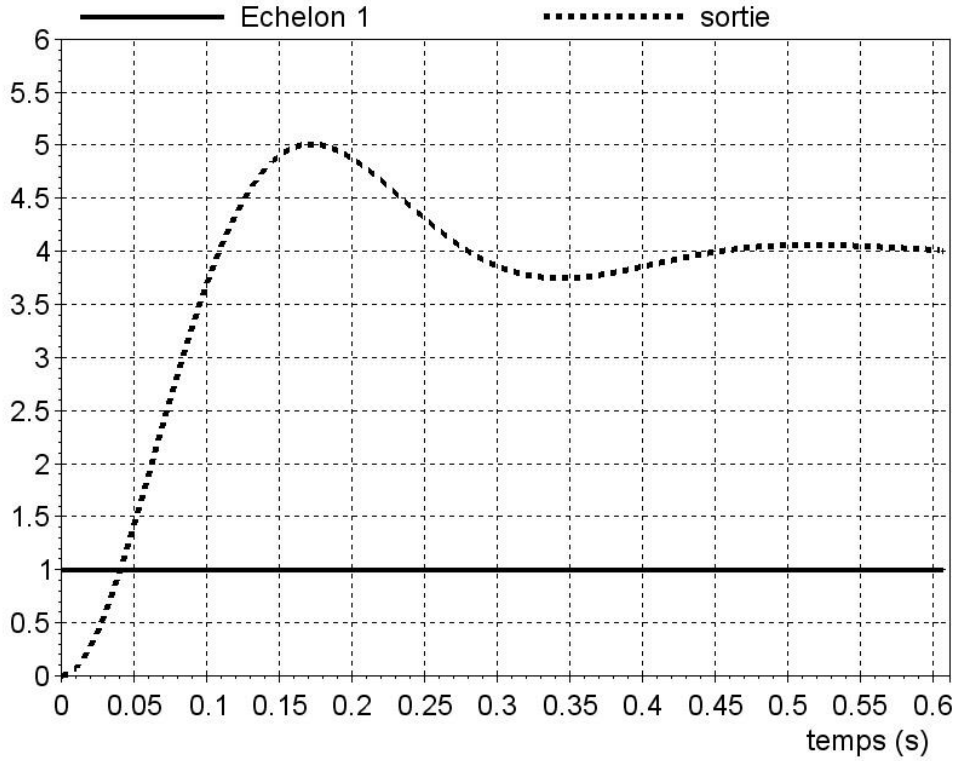
On peut également calculer le temps de réponse à 5 % du système du second ordre soumis à un échelon en fonction de z, mais la tâche est compliquée par la pulsion propre du système.
On introduit donc la notion de temps de réponse réduit T_{rr} :

$$T_{rr} = T_{r5\%} \,.\, \omega_n$$

Ce stratagème, nous permet de présenter graphiquement (abaque) le $T_{r5\%}$ pour tous les seconds ordres en passant par T_{rr}



2.3 – Identification à partir d'une réponse temporelle à un échelon.



En utilisant les 2 abaques précédents, identifions :

Les coefficients de ce système du second ordre sont :

$D_1(\%) =$

$T_{r5\%} =$

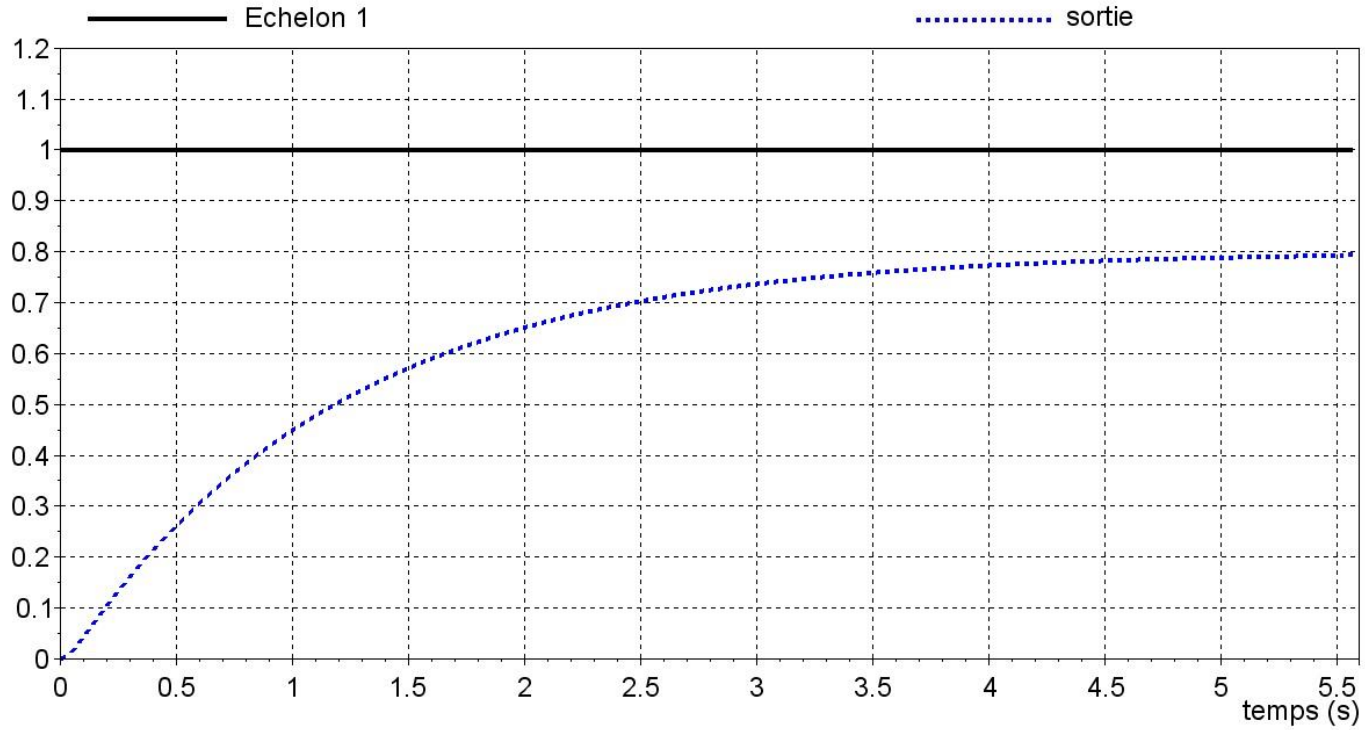
Donc :

$K =$

$\omega_n =$

$z =$

En utilisant les 2 abaques précédents, identifions :



$D_1(\%) =$ $T_{r5\%} =$

Donc : $K =$ $\omega_n =$ $z =$ soit $H(p) =$

2.4 –Réponse harmonique asymptotique d'un système du second ordre.

L'analyse harmonique consiste à soumettre mathématiquement notre système à toutes les fréquences (en entrée) pour en déduire sa réponse (en sortie) pour chacune des fréquences.

La variation de la fréquence d'entrée est incarnée par la variable ω et l'on va ainsi regarder :

- Le gain (sortie/entrée) (en dB) pour chaque ω.
- L'argument déphasage du signal de sortie / à celui d'entrée (en rd) pour chaque ω.

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z.p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \text{ soit } H(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j.\frac{2z.\omega}{\omega_n}}$$

Analyse des gains et tracé du diagramme asymptotique des gains pour Bode :

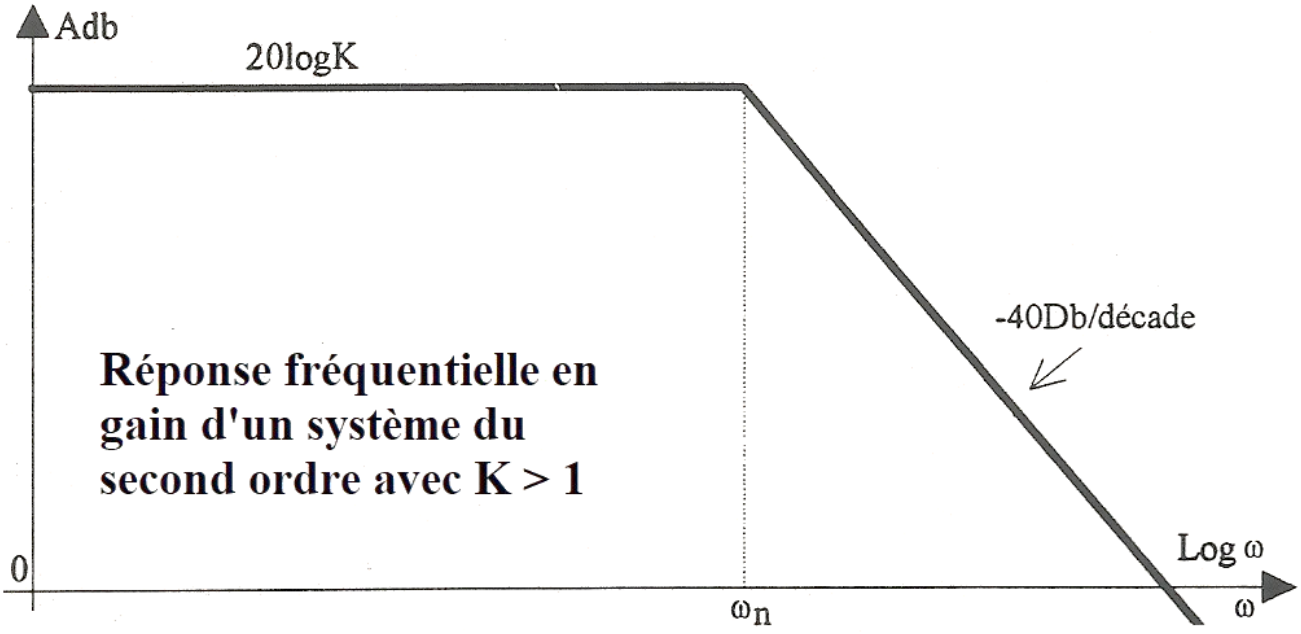
$$A_{dB}(\omega) = 20\log\left|\frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j.\frac{2z.\omega}{\omega_n}}\right| = 20\log\frac{K}{\left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4z^2.\omega^2}{\omega_n^2}}\right)}$$

$$A_{dB}(\omega) = 20\log K - 20\log\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4z^2.\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$\omega \to 0$ $\quad A_{dB}(\omega) = 20\log K$ C'est une droite horizontale

$\omega \to \infty$ $\quad A_{dB}(\omega) = 20\log K - 20\log\frac{\omega^2}{\omega_n^2}$ soit $A_{dB}(\omega) = 20\log K.\omega_n^2 - 40\log\omega$

C'est une droite de pente négative (– 40 dB/déc) croisant la précédente droite en $\omega = \omega_n$



Analyse des phases et tracé du diagramme asymptotique des phases pour Bode :

La phase est donnée par l'argument de $H(j\omega)$

$$\Phi = arg[H(j\omega)] = arg\left[\frac{K}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+j.\frac{2z.\omega}{\omega_n}}\right] = argK - arg\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+j.\frac{2z.\omega}{\omega_n}\right]$$

$$\Phi = arg[H(j\omega)] = 0 - \arctan\left(\frac{\frac{2z.\omega}{\omega_n}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\right)$$

Pour le diagramme asymptotique, on calcule :

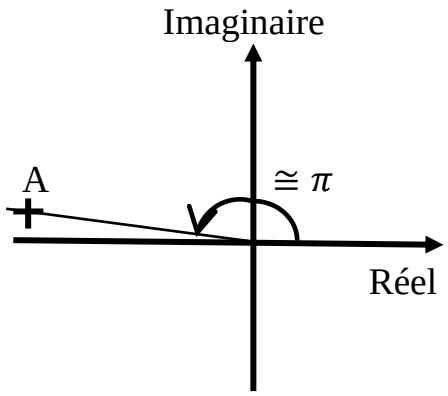
$\omega \to 0$ $\quad \Phi = 0$ C'est une droite horizontale passant par 0°

$\omega \to \infty$ $\quad \Phi = -\arctan\left(\frac{\frac{2z.\omega}{\omega_n}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\right) = -\arctan\left(\frac{\infty}{-\infty^2}\right) = -\arctan(0^-) = 0$?

Attention, en utilisant la fonction arctan, on ne peut trouver que des résultats entre $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, mais ici, nous cherchons le déphasage réel d'un système du second ordre quand $\omega \to \infty$.

Observons ce complexe $arg[H(j\omega)]$ quand $\omega \to \infty$ dans le plan complexe :

Sa partie imaginaire est positive $(+\infty)$, mais infiniment plus petite que sa partie réelle qui elle est négative $(-\infty^2)$.

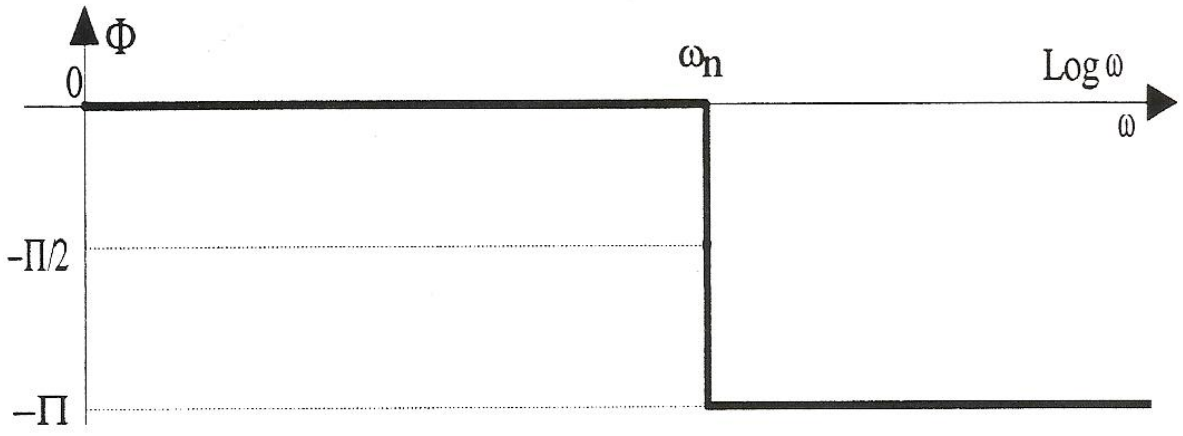


Cela le positionne en A dans le plan complexe.

On observe donc un argument de π mais le $-$ avant l'arctan cela donne $-\pi$

On peut aussi dire qu'un second ordre est le produit de 2 premier ordre et donc les déphasages s'ajoutant, on trouve sans peine un déphasage de $-\pi$.

D'ailleurs un 3iéme ordre sera déphasé de $-\frac{3\pi}{2}$ un 4iéme ordre sera déphasé de -2π etc…



2.5 –Réponse harmonique réelle d'un système du second ordre.

Reprenons l'expression complète des gains du second ordre.

$$A_{dB}(\omega) = 20\log|H(j\omega)| = 20\log K - 20\log\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4z^2.\omega^2}{\omega_n^2}}$$

On trouve un extrémum à la fonction $|H(j\omega)|$ en calculant $\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = 0$

La pulsation associée est appelée pulsation de résonance et s'exprime :

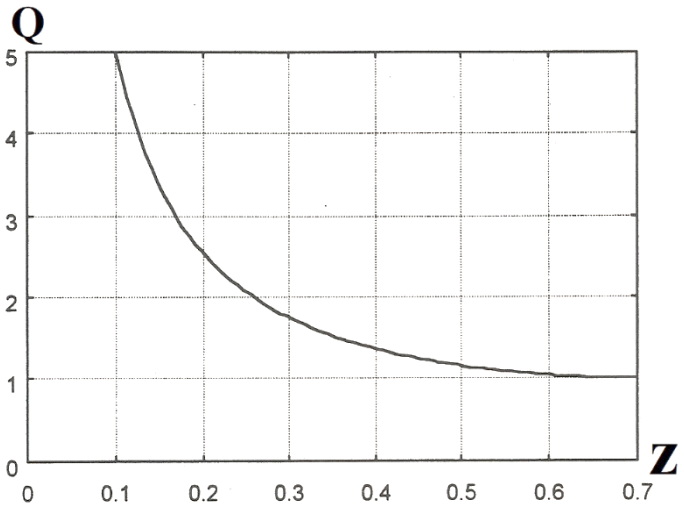
$\omega_r = \omega_n.\sqrt{1-2.z^2}$

On peut noter que la résonance ω_r n'existe que pour $z < \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}707$

A cette pulsation, le module est donc de :

$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{2z\sqrt{1-z^2}}$$

Plus z est petit plus le module est grand.



On définit Q facteur de résonance (ou de surtension) : $Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$

Cela donne donc un diagramme réel des gains qui peut vraiment s'éloigner du diagramme asymptotique.

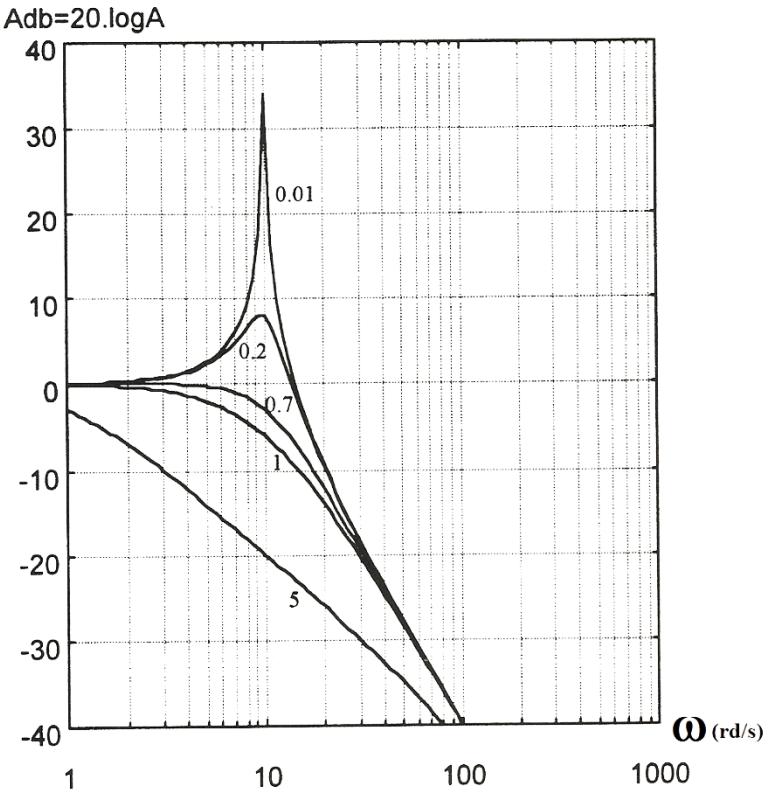
Si on prend, par exemple :

$$H(p) = \frac{1}{1+0{,}2z.p+0{,}01p^2}$$

pour différents z.

On obtient au voisinage de ω_n les courbes réelles de gain suivantes :

Pour nos systèmes réels, on visera un facteur de surtension Q aux alentours de 1,3 dans son comportement en boucle fermée, ce qui, comme on le verra ensuite, est un bon compromis entre stabilité et rapidité.

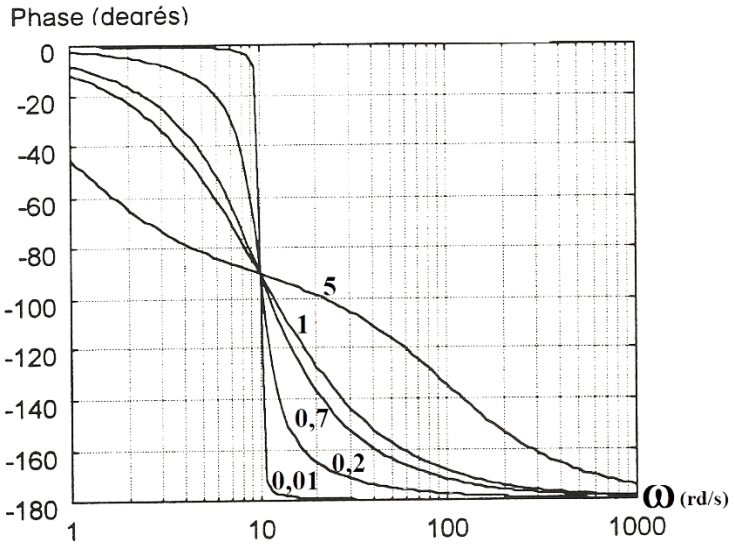


Reprenons l'expression complète des phases du second ordre :

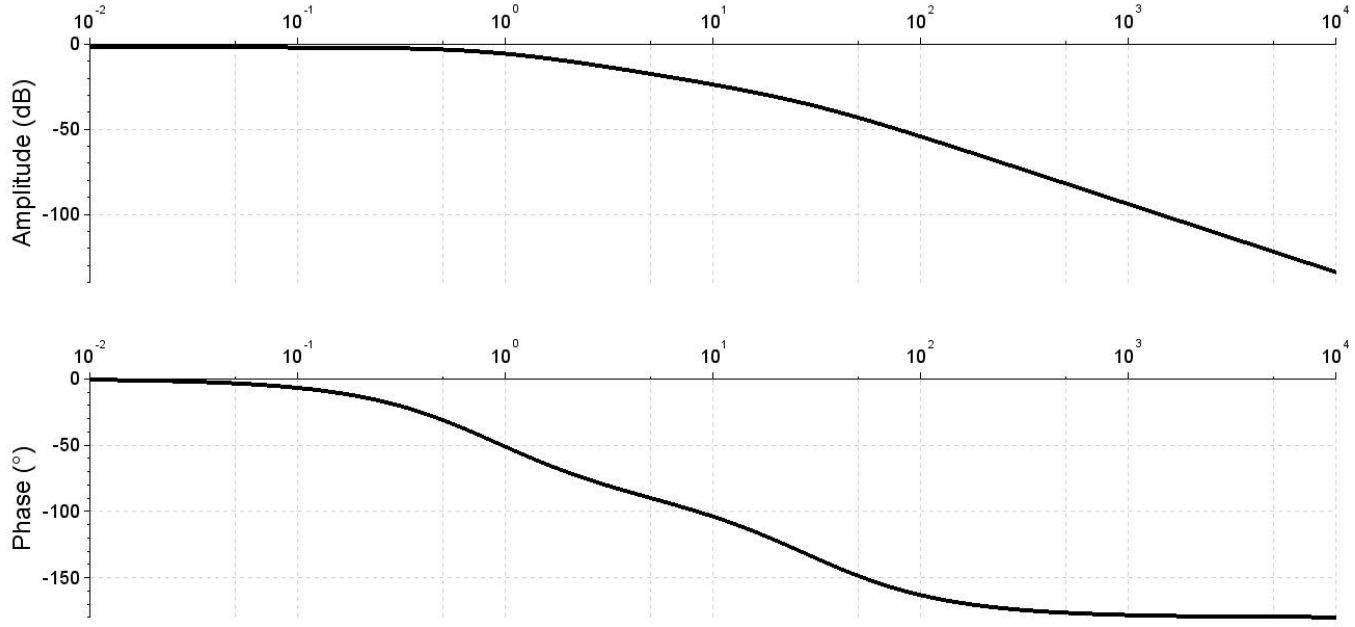
$$\Phi = -\arctan\left(\frac{\frac{2z.\omega}{\omega_n}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\right)$$

Là encore le coefficient d'amortissement z va jouer un grand rôle puisque nous obtenons pour le même exemple que les gains :

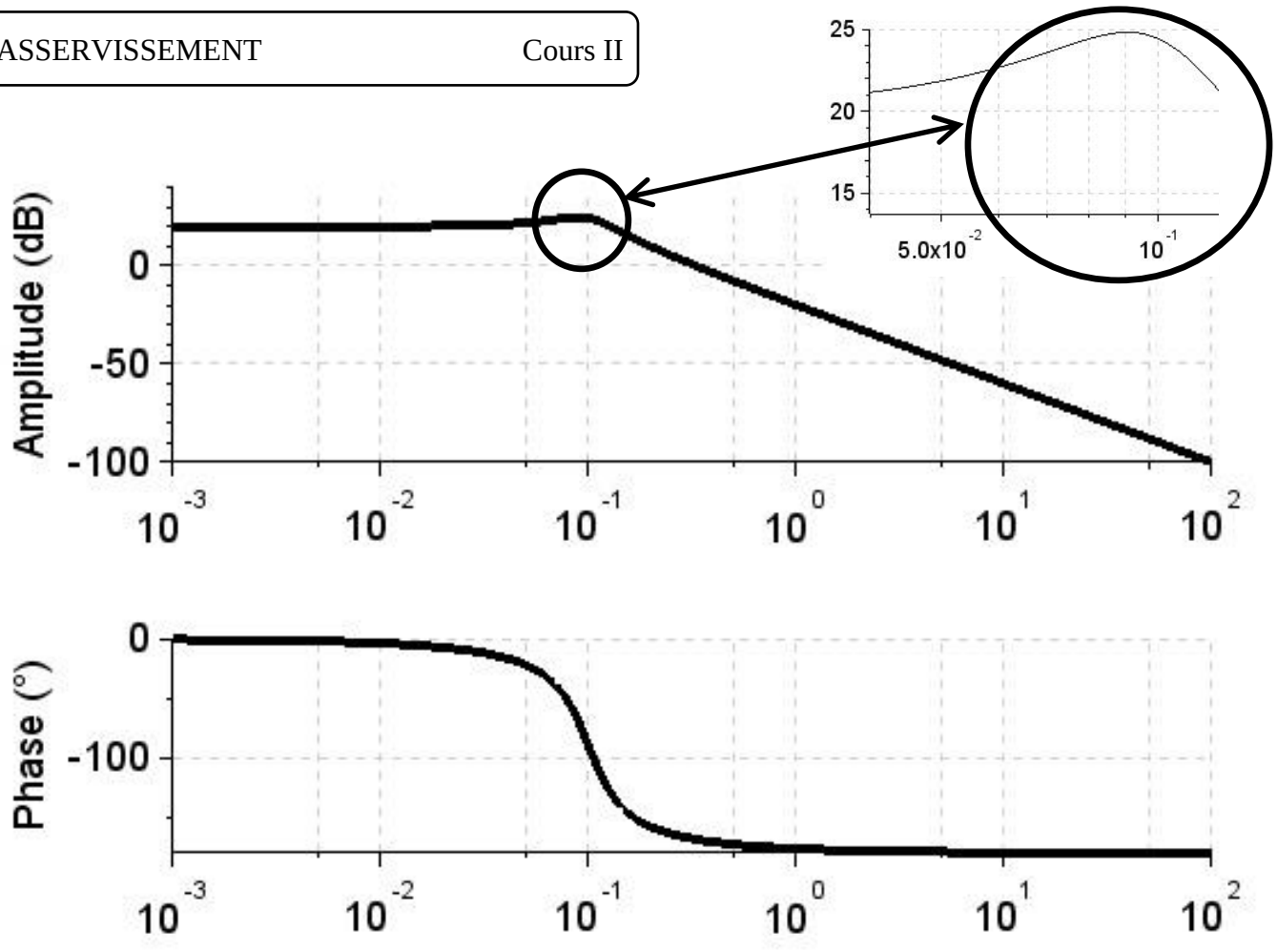
Le passage de 0 à $-\pi$ se faisant de plus en plus brusquement lorsque z diminue.



2.6 – Identifications à partir d'une réponse fréquentielle d'un second ordre.



Donc : $K =$ $\omega_n =$ $z =$ soit $H(p) =$



Donc : $K =$ $\omega_n =$ $z =$ soit $H(p) =$

3 – DIAGRAMME DE BODE POUR UNE FONCTION D'ORDRE QUELCONQUE.

3.1 – Rappel mathématique.

Pour le 1er ordre de type : $H(j\omega) = \dfrac{K}{(1 + \tau.j\omega)}$

On a en gain : $A_{dB}(\omega) = 20\log K - 20\log\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}$

Pour $\omega \to 0$, on a une droite horizontale jusqu'à la cassure en $\omega = {}^{1}/_{\tau}$ puis ensuite on a, pour $\omega \to \infty$ une droite de pente négative (– 20 dB/déc)

On a en phase : $\Phi = arg[H(j\omega)] = -\arctan \tau.\omega$

Pour $\omega \to 0$, nul jusqu'à la cassure en $\omega = {}^{1}/_{\tau}$ puis ensuite on a, pour $\omega \to \infty$ on a $-\frac{\pi}{2}$

Donc pour le 1er ordre de type : $H(j\omega) = K.(1 + \tau.j\omega)$

On a en gain : $A_{dB}(\omega) = 20\log K + 20\log\sqrt{1+\tau^2\omega^2}$

Pour $\omega \to 0$, on a une droite horizontale jusqu'à la cassure en $\omega = {}^{1}/_{\tau}$ puis ensuite on a, pour $\omega \to \infty$ une droite de pente positive (+ 20 dB/déc)

On a en phase : $\Phi = arg[H(j\omega)] = \arctan \tau.\omega$

Pour $\omega \to 0$, nul jusqu'à la cassure en $\omega = {}^{1}/_{\tau}$ puis ensuite on a, pour $\omega \to \infty$ on a $+\frac{\pi}{2}$

Pour le 2nd ordre de type : $H(j\omega) = \dfrac{K}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+j.\dfrac{2z.\omega}{\omega_n}}$

On a en gain : $A_{dB}(\omega) = 20\log K - 20\log\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\dfrac{4z^2.\omega^2}{\omega_n^2}}$

Pour $\omega \to 0$, on a une droite horizontale jusqu'à la cassure en $\omega = \omega_n$ puis ensuite on a, pour $\omega \to \infty$ une droite de pente négative (– 40 dB/déc)

On a en phase : $\Phi = arg[H(j\omega)] = -\arctan\left(\dfrac{\dfrac{2z.\omega}{\omega_n}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\right)$

Pour $\omega \to 0$, nul jusqu'à la cassure en $\omega = \omega_n$ puis ensuite on a, pour $\omega \to \infty$ on a $-\pi$

Donc pour le 2nd ordre de type : $H(j\omega) = K.\left(\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+j.\dfrac{2z.\omega}{\omega_n}\right)$

On a en gain : $A_{dB}(\omega) = 20\log K + 20\log\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\dfrac{4z^2.\omega^2}{\omega_n^2}}$

Pour $\omega \to 0$, on a une droite horizontale jusqu'à la cassure en $\omega = \omega_n$ puis ensuite on a, pour $\omega \to \infty$ une droite de pente positive (+ 40 dB/déc)

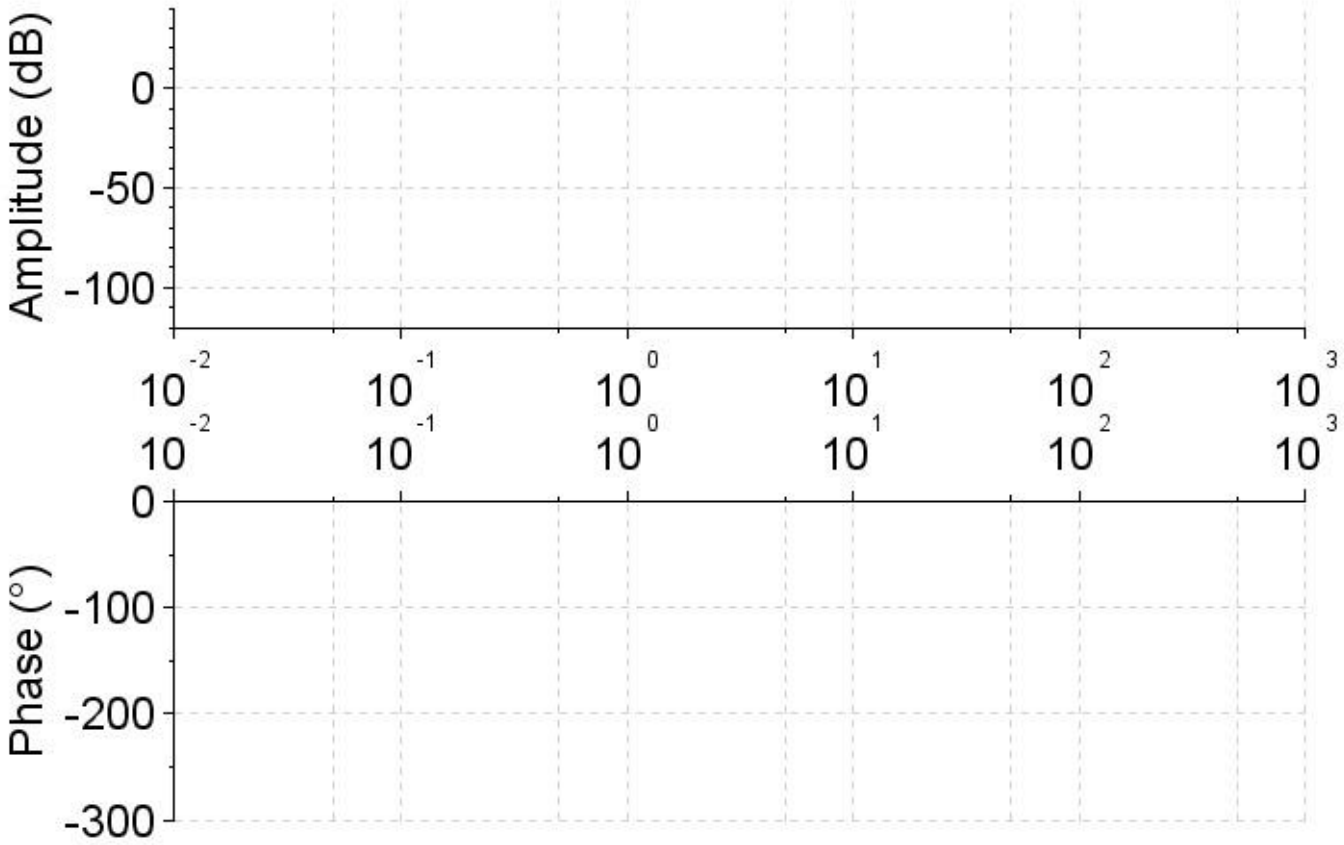
On a en phase : $\Phi = arg[H(j\omega)] = +\arctan\left(\dfrac{\dfrac{2z.\omega}{\omega_n}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)}\right)$

Pour $\omega \to 0$, nul jusqu'à la cassure en $\omega = \omega_n$ puis ensuite on a, pour $\omega \to \infty$ on a $+\pi$

3.2 – Exemple simple.

Soit la fonction de transfert suivante : $H(p) = \dfrac{100.(1+0{,}033.p)}{(1+5.p).(1+0{,}44.p+0{,}1.p^2)}$

Tracer le diagramme de Bode asymptotique, ci-dessous :



3.3 – cas particulier de l'intégrateur simple, double, …

Pour l'intégrateur simple : $H(j\omega) = \dfrac{K}{j\omega}$

On a en gain : $A_{dB}(\omega) = 20\log K - 20\log\omega$

C'est une droite de pente négative (– 20 dB/déc.) qui coupe l'axe des 0 dB en K.

On a en phase : $\Phi = arg[H(j\omega)] = -\arctan\dfrac{\omega}{0} = -\arctan\infty = -\dfrac{\pi}{2}$

Pour l'intégrateur double : $H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2}$

On a en gain : $A_{dB}(\omega) = 20\log K -$

C'est une droite

On a en phase : $\Phi = arg[H(j\omega)] =$

3.4 – Exemple final.

Soit la fonction de transfert suivante : $H(p) = \frac{30.(1+p)}{p.(1+0{,}21.p+0{,}002.p^2)}$

Tracer le diagramme de Bode asymptotique, ci-dessous :

