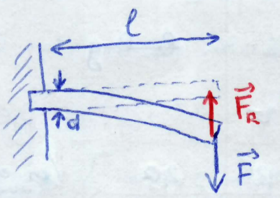
DS n°1 - Oscillateur, propagation d'ond. et analyse dimensionnelle.

Exercice n°1

1. $Y = \dfrac{7\ell^3 F}{Ed^4}$ donc $\dim(Y) = \dim\left(\dfrac{7\ell^3F}{Ed^4}\right)$ ⊛



$Y = \dfrac{7\ell^3 F}{Ed^4}$

or $\dim(F) = M.L.T^{-2}$

et $\dim(Y) = \dim(\ell) = \dim(d) = L$

donc ⊛ devient : $L = \dfrac{\underbrace{\dim(7)}_{\substack{=1 \\ \text{sans dimension}}}\cancel{(\dim(\ell))^3}\dim(F)}{\dim(E)(\dim(d))^{\cancel{4}\,1}} = \dfrac{M.T^{-2}}{\dim(E)} \Rightarrow \boxed{\dim(E) = M.L^{-1}.T^{-2}}$

dimension de E

L'unité S.I. de E est $m^{-1}.kg.s^{-2}$

/1

2. Si l'extrémité de la fibre est fixe, c'est-à-dire à l'équilibre, il existe une force de rappel $\vec{F_R}$ opposée à la force $\vec{F}$ tel que $\|\vec{F}\| = \|\vec{F_R}\|$ (principe d'action / réaction)

Or la force $\vec{F}$ a pour norme $\boxed{\|\vec{F}\| = F = \dfrac{Ed^4}{7\ell^3}Y}$ donc la force de rappel opposée est de cette forme aussi : $\boxed{\|\vec{F_R}\| = \dfrac{Ed^4}{7\ell^3}Y}$

Cette relation ressemble à celle d'un ressort de raideur $\boxed{k = \dfrac{Ed^4}{7\ell^3}}$ et d'élongation Y. (La longueur à vide étant nulle ici puisque sans force $\vec{F}$, $Y=0$)

/1

3. $k = \dfrac{\cancel{7}.10^{10}\,(10^{-5})^4}{\cancel{7}\,(7.10^{-3})^3} = \dfrac{10^{-10}}{3{,}43\,10^{-7}} \simeq 3\,10^{-4}\ N.m^{-1}$

/1

4. $E_m = E_c + E_p = \rho\ell d^2\left(\dfrac{dY}{dt}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{Ed^4}{7\ell^3}Y^2$

/1

5. Système équivalent à un système masse + ressort avec pour "masse" équivalente : $M = 2\rho\ell d^2$ d'après la forme de l'énergie cinétique :

$$\underbrace{\begin{cases} E_c = \dfrac{1}{2}M\dot{Y}^2 \\ E_p = \dfrac{1}{2}kY^2 \end{cases}}_{\text{classiques}} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} E_c = \rho\ell d^2\dot{Y}^2 \\ E_p = \dfrac{1}{2}\dfrac{Ed^4}{7\ell^3}Y^2 \end{cases} \quad \text{si on prend} \begin{cases} M = 2\rho\ell d^2 \\ k = \dfrac{Ed^4}{7\ell^3} \end{cases}$$

L'énergie mécanique est donc conservée

Les vibrations de la fibres sont décrit par le paramètre Y qui vérifie l'équation de l'oscillateur harmonique :

$\boxed{\dfrac{d^2Y}{dt^2} + \omega_0^2 Y = C}$ où C est une constante et $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}} = \sqrt{\dfrac{Ed^{\cancel{4}\,2}}{7\ell^3} \times \dfrac{1}{2\rho\ell \cancel{d^2}}} = \sqrt{\dfrac{Ed^2}{14\rho\ell^4}}}$

/1

6. cf question précédente

/1

7. Fréquence demandée et pas pulsation : $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{Ed^2}{14\rho\ell^4}}$

$f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\cancel{7}.10^{10}\,(\cancel{10^{-5}})^2}{\cancel{7}\times2\times2{,}5.10^3\,(7.10^{-3})^4}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{10^9}{2\times2{,}5\times2{,}401.10^3}} \simeq 10^1\ Hz$ $(4{,}6.10^1\,Hz)$

/1

* si on parle de la lumière émise → ondes electromagnetiques. /1

2- Compression et dillatation dans le sens de propagation ⇒ onde longitudinale /1

3. $\lambda = \frac{v}{\nu}$ avec $v = 340\ m.s^{-1}$ et $\nu \in [20\ Hz, 20\ kHz]$ /1

donc $\boxed{\lambda \in [0{,}017\ m\ ;\ 17\ m]}$ (→ réponse acceptée $\lambda \in [0{,}01\ m ; 10\ m]$ (ordre de grandeur)

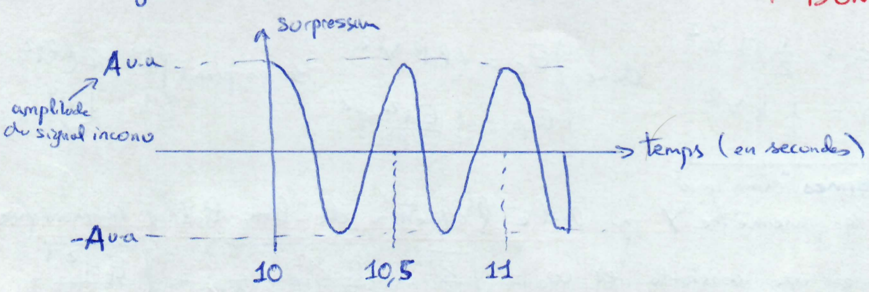
4. affirmation 1: Faux, une onde electromagnetique peut se propager dans le vide.
2: Faux, une onde sonore ne peut que se propager dans un milieu matériel. /1

5. L'éclair sera vu par le promeneur au bout d'un temps $\boxed{\Delta T = \frac{d}{c}}$ avec $d = 3{,}4\ km$
la distance qu'à la lumière à parcourir et c sa vitesse dans l'air ($c \simeq 3.10^8\ m.s^{-1}$)
(milieu homogène, transparent, lineaire, isotrope d'indice $n \simeq 1$)
soit $\Delta T = \frac{3{,}4.10^3}{3\ 10^8} \simeq 1{,}1.10^{-5}\ s = 11\ \mu s$
(quasi instantané)
Le promeneur entendra le tonnerre au bout de $\boxed{\Delta T' = \frac{d}{v}}$ soit $\Delta T' = \frac{3{,}4.10^3}{340} = 10\ s$ /1

6. $\tau = \Delta T' - \Delta T$ est le temps entre la réception de la lumière et la réception du bruit provoqué par le tonnerre. $\Delta T' - \Delta T = 10 - 1{,}1.10^{-5} \simeq 10\ s = \Delta T'$
On peut donc dire que $\tau \simeq \Delta T'$ (la réception de la lumière est quasi instantanée par rapport à la réception du bruit)

Si on divise par 3 le temps τ, on obtient 3,3 qui est à peu près la distance d.
↳ En fait le 3 représente $\frac{1}{v}$ qui s'exprime en $s.km^{-1}$ et qui vaut $\frac{1}{0{,}34} \simeq 3\ s.km^{-1}$ /1
Diviser par 3 est plus simple que de multiplier par 3,4 pour obtenir la distance. L'affirmation est donc juste (mais reste approximative) → BONUS +1

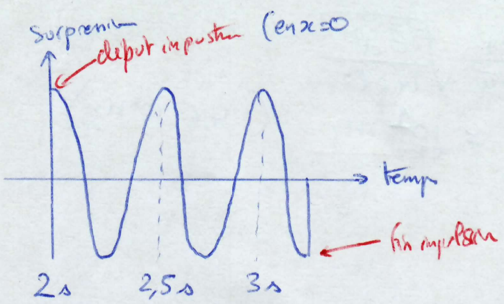
7.

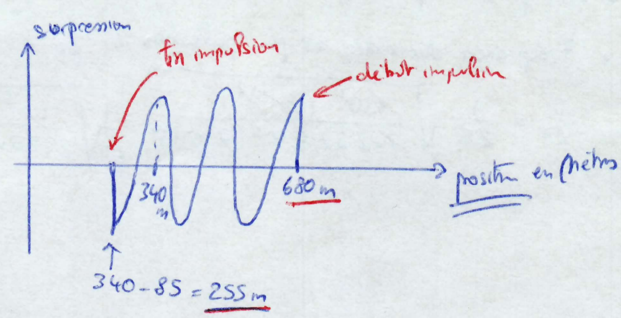


/1

Représentation du train d'onde après propagation d'une distance $d = 3{,}4\ km$ (retard de 10 s)

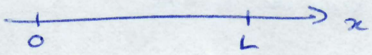
8.





/1

Exercice n°3



1. $S_0(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ /1

2. $S_0'(x,t) = \underbrace{S_0(x+L,t)}_{\text{forme spatiale}} = A\cos(\omega t - k(x+L)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{on sait que} \\ \omega = kc}}{=} A\cos\left(\omega\left(t - \frac{L}{c}\right) - kx\right) = \underbrace{S_0\left(x, t-\frac{L}{c}\right)}_{\text{forme temporelle du retard}}$

/1

3. $S_1(x,t) = rA\cos(\omega(t - L/c) + kx)$

↳ Onde progressive dans le sens des x décroissants, d'amplitude rA et de phase à l'origine (en $t=0$, $x=L$) nulle.

S_1 et S_0' ont en différence le signe entre la dépendance spatiale et temporelle et l'amplitude diminuée d'un facteur r.

/1

4. $S_1'(x,t) = rA\cos\left(\omega\left(t - \frac{2L}{c}\right) + kx\right)$

/1

5. $S_2(x,t) = r^2 A\cos\left(\omega\left(t - \frac{2L}{c}\right) - kx\right)$ par analogie avec les questions 2 et 3.

amplitude modifiée d'un facteur r — signe changé

/1

6. $S_N(x,t) = r^N A\cos\left(\omega\left(t - \frac{NL}{c}\right) + \underbrace{(-1)^{N+1}}_{\text{pour tenir compte du signe}} kx\right)$ $\Longrightarrow$ pour N paire : $S_N(x,t) = r^N A\cos\left(\omega\left(t-\frac{NL}{c}\right) - kx\right)$; pour N impaire : $S_N(x,t) = r^N A\cos\left(\omega\left(t-\frac{NL}{c}\right) + kx\right)$

BONUS +1

Formules bien cohérentes pour $N = 0, 1$ et 2.

7. Erreur d'énoncé : "$\frac{\omega L}{c}$" est un multiple de π.

$S_N(x,t) = r^N A\left[\cos(\omega t + (-1)^{N+1}kx)\underbrace{\cos\left(\frac{\omega L}{c}N\right)}_{=\pm 1 \text{ car } \frac{\omega L}{c}N \text{ est un multiple de } \pi} + \cancel{\sin(\omega t + (-1)^{N+1}kx)\sin\left(\frac{\omega L}{c}N\right)}^{=0}\right]$, $\frac{\omega L}{c}N \equiv$ multiple de π

2 cas → si $\frac{\omega L}{c} \equiv 0\,[2\pi]$ alors $\cos\left(\frac{\omega L}{c}N\right) = 1\ \forall N$ ①

→ si $\frac{\omega L}{c} \equiv \pi\,[2\pi]$ alors $\cos\left(\frac{\omega L}{c}N\right) = (-1)^N$ ②

Cas ① : $S_N(x,t) = r^N A\cos(\omega t + (-1)^{N+1}kx)$

Cas ② : $S_N(x,t) = (-r)^N A\cos(\omega t + (-1)^{N+1}kx)$

BONUS +2

8. $S_{tot}(x,t) = \sum_{N=0}^{\infty} S_N(x,t) = \sum_{p=0}^{\infty} r^{2p}A\cos(\omega t - kx) + r^{2p+1}A\cos(\omega t + kx)$ pour le cas ①

$= A(\cos(\omega t - kx) + r\cos(\omega t + kx)) \times \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty}(r^2)^p}_{= \frac{1}{1-r^2}}$

$= \cancel{\frac{A(1+r)}{1-r^2}\cos(\omega t)\cos(kx)} + \frac{A(1-r)}{1-r^2}\sin(\omega t)\sin(kx)$

d'après les conditions aux limites en $x=0$ et $x=L$, $\cos(\omega t)\cos(kx)$ doit être nul donc on enlève la partie en cosinus et $kL \equiv 0\,(\pi)$ pour que $\sin(kL) = 0$

$= \frac{A}{1+r}\sin(\omega t)\sin(kx)$

L'amplitude de l'onde stationnaire est $\frac{A}{1+r}$

(Pour le cas ② l'amplitude est $\frac{A}{1-r}$)

BONUS +2

Remarque : pour un coefficient de réflexion de $r \simeq -1$ l'amplitude $\frac{A}{1+r}$ tend vers l'infini. C'est en réalité impossible, d'autres phénomènes finissent par intervenir (non linéarités) pour limiter cette amplitude.