DS n°1 – Oscillateur, propagation d'onde et analyse dimensionnelle

Consignes :

- Les calculatrices sont interdites.
- Un **soin** particulier sera accordé à la rédaction : toutes les réponses devront être justifiées. Toute réponse non justifiée ne donnera pas droit à l'attribution des points.
- La réalisation de **schémas soignés** accompagnant le propos pourra être valorisé.
- Les expressions littérales seront encadrées, et les applications numériques soulignées en couleur
- Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez le sur votre copie.
- Les commentaires sur les valeurs numériques seront appréciés et éventuellement valorisés.
- Un résultat non–homogène pourra conduire à un **malus** de 10% sur la note globale, il est possible d'indiquer sur la copie que vous avez remarquez un problème d'homogénéité mais que vous n'avez pas trouvé l'origine de l'erreur.
- Remplacer les grandeurs par leurs valeurs numériques directement dans la formule de départ (au lieu de conduire le **calcul littéral**) pourra être considéré comme non recevable.

« *Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.* »

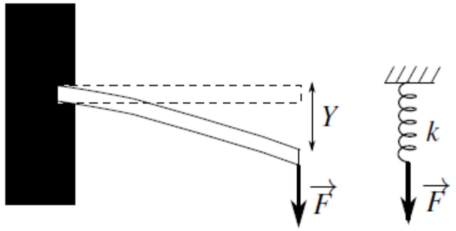
Néanmoins, le candidat prendra soin de tourner 7 fois son stylo dans sa bouche et de vérifier que l'erreur ne vient pas de lui.

Les exercices 1,2 et 3 sont indépendants. Il y a 23 questions en tout pour 2H d'interrogation (ce qui vous donne un temps moyen d'un peu moins de 5 minutes par question). Si vous passez à une question suivante (vous avez le droit et c'est même conseillé après avoir passé plus de 5min sur la question), laissez un blanc sur votre copie pour éventuellement y revenir plus tard.

Exercice 1 : Elasticité du verre

Le verre est un matériau très dur. On peut toutefois le déformer légèrement sans le casser : on parle d'élasticité. Récemment, des expériences de biophysique ont été menées pour étudier l'ADN. Le capteur utilisé était simplement une fibre optique en silice amincie à l'extrémité de laquelle on accroche un brin d'ADN. L'expérience consistait à suivre la déformation de flexion de la fibre. La masse volumique du verre est $\rho = 2500$ kg.m^{-1}.

La fibre de verre de longueur ℓ et de diamètre d est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la fibre est horizontale (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale F (on supposera que la force F reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre de la fibre, celle-ci est déformée. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance Y que l'on appelle la flèche (voir figure).



La flèche Y est donnée par la relation suivante (on notera la présence du facteur numérique 7, sans dimension, qui est en fait une valeur approchée pour plus de simplicité) : $\dfrac{7\ell^3 F}{Ed^4}$, où E est appelé module d'Young du verre. Pour les applications numériques on prendra pour le module d'Young $E = 7.10^{10}$ S.I..

1. Quelle est l'unité S.I. du module d'Young E ?

2. En considérant uniquement la force F, montrer que l'on peut modéliser la fibre de verre par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E, d et ℓ.

3. Calculer numériquement k pour une fibre de longueur $\ell = 7$ mm et de diamètre $d = 10\,\mu$m.

On a tous fait l'expérience suivante : faire vibrer une règle ou une tige lorsqu'une de ses extrémités est bloquée. On cherche ici à trouver les grandeurs pertinentes qui fixent la fréquence des vibrations. L'extrémité de la tige vaut $Y(t)$ à l'instant t. On admet que lors des vibrations de la fibre, l'énergie cinétique de la fibre de verre est donnée par l'expression $E_c = \rho \ell d^2 \left(\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right)^2$. Son énergie potentielle élastique lorsque la flèche vaut Y est : $E_p = \dfrac{1}{2}\dfrac{Ed^4}{7\ell^3}Y^2$.

4. Écrire l'expression de l'énergie mécanique de la fibre en négligeant l'énergie potentielle de pesanteur.

5. Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du temps. En déduire l'équation différentielle qui régit les vibrations de la fibre.

6. Quelle est l'expression de la fréquence propre de vibration d'une tige de verre de module d'Young E, de longueur ℓ et de diamètre d ?

7. Calculer numériquement la fréquence des vibrations d'une fibre de verre de longueur 7 mm et de diamètre 0,01 mm. (Ordre de grandeur demandé)

Exercice 2 : Thor, god of thunder

Les cumulo-nimbus sont des nuages pouvant donner lieu à des manifestations orageuses. Ces nuages ont une extension verticale de l'ordre de 10 km dans les régions tempérées, mais qui peut atteindre jusqu'à 15km dans les régions tropicales. A la base de ces nuages, de forts courants ascendants transportent de l'air chaud et humide en altitude, qui en rencontrant de l'air plus froid, se condense, alimentant ainsi les nuages en humidité. Un cumulo-nimbus peut contenir jusqu'à 300000 tonnes d'eau. A l'intérieur du nuage, les courants ascendants chargés en gouttelettes d'eau rencontrent des courants descendants chargés de cristaux de glace de plus ou moins grande dimension. Les gouttelettes d'eau et de glace se chargent par frottement, la base du nuage se chargeant ainsi négativement tandis que son sommet se charge positivement. Lorsque l'accumulation de charges devient importante, des phénomènes électriques tels que la foudre peuvent se produire.

Dans cette partie, nous étudions la présence simultanée du tonnerre et de l'éclair associés à l'orage. La contraction puis la dilatation des masses d'air surchauffé sur le trajet de l'éclair créent un phénomène sonore, appelé "tonnerre".

1 A quel type d'onde peut-on associer le tonnerre ?

On assimile localement le tonnerre à une onde plane progressive, on note $p(x,t)$ la surpression par rapport à la pression atmosphérique et v_{son}, la célérité du son dans l'air.

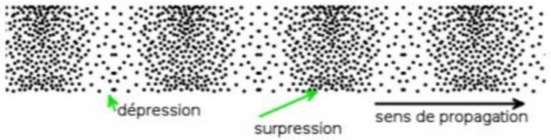


Figure 1 : répartition locale des particules au passage du tonnerre

2 D'après la figure 1, expliquer si le tonnerre est une onde longitudinale ou une onde transversale.

3 On rappelle que le domaine des fréquences audibles par l'homme s'étend de 20 Hz à 20 kHz et que la célérité du son dans l'air vaut $v_{son} = 340\,\mathrm{m.s^{-1}}$ à la température de 20°C. Quelles sont les longueurs d'onde correspondant à ces fréquences ?

4 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant vos réponses.

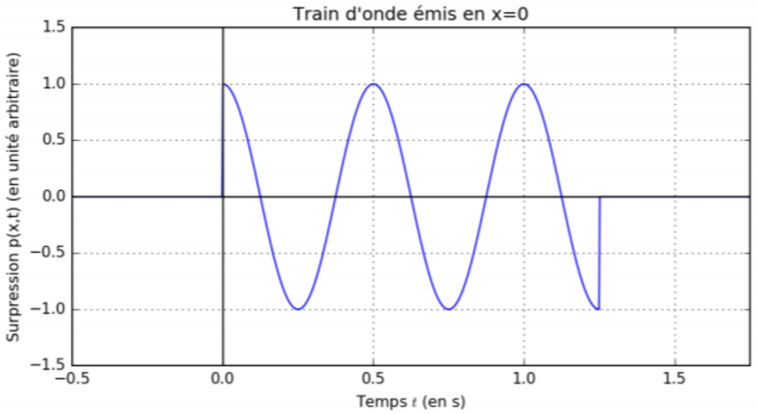
- **affirmation 1 :** Une onde se propage toujours dans un milieu matériel.
- **affirmation 2 :** Une onde sonore peut se propager dans le vide.

Lors d'un orage, la foudre tombe à 3,4 km d'un promeneur. L'éclair et le tonnerre sont émis simultanément au moment où la foudre tombe.

5 Au bout de combien de temps le promeneur verra-t-il l'éclair ? Au bout de combien de temps entendra-t-il le tonnerre ?

6 Justifier la technique qui consiste à compter les secondes entre éclair et tonnerre et à les diviser par 3 pour obtenir la distance, en km, à laquelle la foudre est tombée.

Le tonnerre est modélisé de manière très simplifiée par le train d'onde ci-dessous. La longueur a été largement exagérée dans un souci de lisibilité.



7 Représenter le train d'onde, en fonction du temps, à une distance $d = 3,4$ km de la source.

8 Représenter le train d'onde à l'instant $t_1 = 2$ s ; calculer numériquement, en justifiant précisément, les positions du début (ou front) de l'impulsion et de sa fin.

Exercice 3 : Après mûres réflexions...

On se propose d'étudier la propagation d'onde sinusoïdales le long d'une corde de longueur L, d'extrémités fixes en x=0 et x=L, et des réflexions de ces ondes. Le but est de montrer qu'une onde stationnaire finit par s'établir.

1. Soit une onde sinusoïdale progressive dans le sens (O_x), de phase à l'origine nulle et d'amplitude A. Ecrire l'amplitude $S_0(x,t)$ de cette onde sous la forme d'une fonction cosinusoïdale de sa position et du temps.
2. En notant c la célérité de l'onde, calculer le retard avec lequel l'onde arrive en x=L en partant de x=0. Déterminer l'expression notée $S_0'(x,t)$ de l'amplitude de l'onde après ce retard de propagation en fonction du temps et de la position.
3. Arrivée en x=L, l'onde est réfléchie et se retrouve sous la forme : $S_1(x,t) = rA\cos(\omega(t-L/c)+kx)$, où r est appelé coefficient de réflexion (strictement inférieur à 1). Quelle est l'amplitude de l'onde, son sens de propagation et sa phase à l'origine (en x=L et t=0) ? Quelle différence y-at'il avec l'onde $S_0'(x,t)$?
4. Quel est l'amplitude de l'onde réfléchie après propagation d'une longueur L ? On notera $S_1'(x,t)$ cette onde.
5. Par analogie avec la question 2 et 3 (notamment en reprenant le changement de signe de la question 3), déterminer l'onde réfléchie $S_2(x,t)$ sachant que le coefficient de réflexion est le même aux deux bouts de la corde.
6. L'onde d'amplitude $S_2(x,t)$ se réfléchie en x=L donnant l'onde d'amplitude $S_3(x,t)$ et ainsi de suite. L'onde dont l'amplitude sera notée $S_N(x,t)$ correspond donc à la Nième onde progressive formée au bout de N réflexions de l'onde d'amplitude $S_0(x,t)$. Donner l'expression de l'onde d'amplitude $S_N(x,t)$ en fonction de x,t,N,L et c. Distinguer les cas N paires et impaires. Vérifier si la formule obtenue est bien cohérente avec les expressions trouvées précédemment.
7. Nous allons prendre une corde de longueur particulière : L/c est un multiple de π. Mettre l'amplitude $S_N(x,t)$ sous la forme d'ondes propagatives et utiliser la particularité précédente pour simplifier l'expression
8. Notons $S_{tot}(x,t)$ la somme des amplitudes des ondes $S_N(x,t)$, de N valant 0 jusqu'à l'infini. De quel type d'onde s'agit-il et quelle est son amplitude ? On utilisera la condition $S_{tot}(x,t)$ nulle en x=0 et x=L en mettant le résultat sous la forme $\sin(\omega t)\sin(kx)$ et en utilisant l'expression d'une somme géométrique $1+q+q^2+q^3+... = 1/(1-q)$, pour calculer l'amplitude de l'onde.