DS n°2 : Oscillateurs et optique géométrique

(Durée 3h)

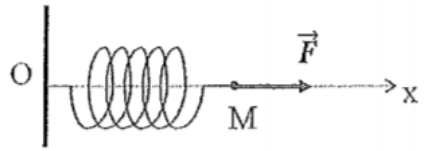
Consignes :

- Les calculatrices sont interdites.
- Un **soin** particulier sera accordé à la rédaction : toutes les réponses devront être justifiées. Toute réponse non justifiée ne donnera pas droit à l'attribution des points.
- La réalisation de **schémas soignés** accompagnant le propos pourra être valorisé.
- Les expressions littérales seront encadrées, et les applications numériques soulignées en couleur mais **pas en rouge**.
- Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, indiquez le sur votre copie.
- Les commentaires sur les valeurs numériques seront appréciés et éventuellement valorisés.
- Un résultat non–homogène pourra conduire à un **malus** de 10% sur la note globale, il est possible d'indiquer sur la copie que vous avez remarquez un problème d'homogénéité mais que vous n'avez pas trouvé l'origine de l'erreur.
- Remplacer les grandeurs par leurs valeurs numériques directement dans la formule de départ (au lieu de conduire le **calcul littéral**) pourra être considéré comme non recevable.

Ce DS comporte trois parties : un QCM (veuillez ne pas répondre au hasard, les réponses absurdes seront comptabilisées négativement), un problème long (en optique) et un exercice facile (oscillateur harmonique).

Exercice 1 : QCM (extrait concours de L'ENAC)

1. Une perle de masse $m = 200\,\text{g}$, supposée ponctuelle, peut coulisser sans frottement sur une tige horizontale. Cette perle est accrochée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur $k = 12\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ dont l'autre extrémité, notée O est fixe et sert d'origine à l'axe Ox. La perle est initialement au repos et on applique à partir d'un instant pris comme origine des temps une force $\vec{F}$ constante.



Déterminer l'expression de la pulsation ω_0 des oscillations et de $x(t)$ pour $t > 0$.

A) $\omega_0 = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$

B) $\omega_0 = \left(\frac{F}{ml_0}\right)^{1/2}$

C) $x(t) = l_0 + \frac{F}{k}\cos(\omega_0 t)$

D) $x(t) = l_0 + \frac{F}{k} - \frac{F}{k}\cos(\omega_0 t)$

2. L'énergie mécanique E_m de la perle au cours de ce mouvement est définie par la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle élastique. En appellant ω_0 la pulsation des oscillations, l'expression de E_m au cours du temps est :

A) $E_m = \frac{1}{2}kl_0^2$

B) $E_m = \frac{F^2}{k}(1 - \cos\omega_0 t)$

C) $E_m = \frac{F^2}{m}\frac{t^2}{2}$

D) $E_m = \frac{k}{2}\frac{F}{k}\cos(\omega_0 t)^2$

3. A l'instant $t = \tau$, on cesse d'appliquer la force $\vec{F}$. Déterminer l'amplitude x_m des oscillations ultérieures en fonction de τ.

A) $x_m = \frac{F}{k}\sin\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)$

B) $x_m = l_0 + \frac{F}{k}\cos\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)$

C) $x_m = 2\frac{F}{k}\sin(\omega_0\tau)$

D) $x_m = \frac{F}{k}\cos(\omega_0\tau)$

4. Calculer la valeur numérique minimale de τ qui assure des oscillations d'amplitude maximale.

A) $\tau \approx 0{,}4\,\text{s}$ B) $\tau \approx 15\,\text{s}$ C) $\tau \approx 0{,}08\,\text{s}$ D) $\tau \approx 2\,\text{s}$

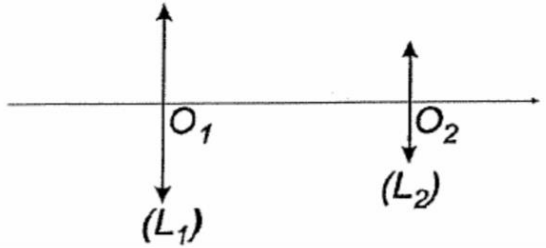
5. Calculer alors le travail W_F fourni par la force $\vec{F}$ entre $t = 0$ et $t = \tau$.

A) $W = Fl_0$ B) $W = 2Fl_0$ C) $W = \frac{2F^2}{k}$ D) $W = \frac{F^2}{k}$

6. Lors de l'expérience, on constate que l'amplitude des oscillations dans la deuxième phase du mouvement est divisée par 2 après 25 oscillations. En supposant que le frottement est de type fluide (force proportionnelle à la vitesse), évaluer le facteur de qualité Q de cet oscillateur. On donne $\ln 2 \approx 0{,}7$.

A) $Q \approx 0{,}7$ B) $Q \approx 5$ C) $Q \approx 25$ D) $Q \approx 100$

7. La lunette astronomique représentée sur la figure ci-après est constituée des deux lentilles minces convergentes (L_1) et (L_2), respectivement, assimilées à un objectif et à un ocula.ire de distances focales images $f_1' = 115$ mm et $f_2' = 20$ mm.



L'oculaire est place de telle sorte que l'instrument soit afocal. Exprimer le grandissement angulaire G_α *de* la lunette :

A) $G_\alpha = -\frac{f_2'}{f_1'}$ B) $G_\alpha = -\frac{f_1'}{f_2'}$ C) $G_\alpha = \frac{f_1'}{f_2'} - 1$ D) $G_\alpha = 1 - \frac{f_2'}{f_1'}$

8. La limite de résolution angulaire de l'œil étant de 1,5 minute d'arc (notation 1,5'), quel doit être l'écart angulaire θ_m minimal entre deux étoiles, a.fin qu'elles apparaissent séparées à travers la lunette?

A) $\theta_m = 0{,}32'$ B) $\theta_m = 3{,}8'$ C) $\theta_m = 1{,}2'$ D) $\theta_m = 0{,}26'$

9. A quelle distance p_1' de O_2 trouve-t-on l'image de O_1 par (L_2)?

A) $p_1' = 5{,}21mm$ B) $p_1' = 17{,}4mm$ C) $p_1' = 23{,}5mm$ D) $p_1' = 7{,}35mm$

10. *Le* diamètre de la monture circulaire de (L_1) est de 4 cm. Quelle est le diamètre D_1' *de* l'image de la monture de (L_1) par (L_2) ?

Exercice 2 : Extrait du concours CCP de 2015

(document réponse à compléter donné en annexe)

Remarques préliminaires importantes

Il est rappelé aux candidat(e)s que :

- les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques ; les résultats exprimés sans unité ne seront pas pris en compte ;
- tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le(la) candidat(e).

Rappel des relations de conjugaison pour une lentille mince $\mathcal{L}$ de centre O, de foyer objet F, de foyer image F' et de distance focale image f' donnant d'un objet AB une image $A'B'$.

Représentation de A' image de A par $\mathcal{L}$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$ (1) Relation de Descartes

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$ (2) Relations de grandissement

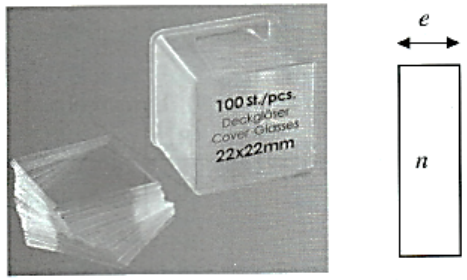


Figure 5 - Lamelles d'épaisseur e.

L'objectif est de déterminer les caractéristiques d'une lamelle d'épaisseur e et d'indice n par deux méthodes. Ce problème comporte cinq parties. La première partie aborde l'étude de la lame de verre. Les deuxième, troisième et quatrième parties cherchent à déterminer n et e par une méthode d'optique géométrique. La cinquième partie traite d'une méthode interférentielle.

Aide au démarrage (à lire en complément des questions)

II.1 : Ce n'est pas véritablement un ordre de grandeur : il faut au moins deux chiffres significatif (sinon on ne peut pas distinguer l'ODG du verre, de l'air, de l'eau…).
II.3 : Comment la lame va dévier les rayons d'après la question précédente ? Quel sera le type d'image observé ?
II.5 : Utiliser les schémas effectués précédemment, ajouter des angles et utiliser les lois de Snell-Descartes.
II.6 : Comment régler l'oculaire pour qu'un œil normal soit au repos en observant le réticule à travers l'oculaire ? Faire un schéma au cas où.
II.7 : Attention, la lunette à frontale fixe n'est pas un système afocal ! (ce n'est pas une lunette de Kepler, encore moins de Galilée).
II.11.a) Une lame semi réfléchissante laisse passer 50% de la lumière et en réfléchi 50%. Pour tracer les rayons, on peut utiliser les même lois que pour un miroir pour le rayon réfléchi ou utiliser la loi de propagation en ligne droite pour celui qui est transmis (c'est une « lame mince », sans épaisseur : les lois de Snell-Descartes conduisent à ce résultat). Attention, le réticule n'est pas forcément à la distance focale de la lentille L_3.

- - - - - - - - -

Première partie - Lame de verre

Une lame transparente est caractérisée par son épaisseur e et l'indice n du milieu qui la compose. On cherche à caractériser ce dioptre dans le cadre de l'optique géométrique.

II.1 Donner un ordre de grandeur de l'indice du verre.

II.2 Rappeler les relations de Snell-Descartes à la réfraction.

II.3 Effectuer un rapide tracé de rayon sur la figure A1 (document réponse) afin de trouver graphiquement la position de A' image de A par la lame.

II.4 Effectuer, de même, un rapide tracé de rayon sur la figure A2 (document réponse) avec un point objet A virtuel.

II.5 Montrer, par des considérations géométriques, que la relation de conjugaison qui relie A et A' est donnée dans les conditions de Gauss par :

$$\overline{AA'} = e\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Deuxième partie - Viseur

On étudie un viseur à frontale fixe (figure 6) constitué par :

- un objectif $\mathcal{L}_2$ de centre O_2, de distance focale $f_2' = 50\,\text{mm}$;
- un réticule gradué R_{oc} ;
- un oculaire modélisé par une lentille convergente $\mathcal{L}_1$ de centre O_1 et de distance focale $f_1' = 50\,\text{mm}$.

On règle la lunette afin d'avoir, pour l'objectif, un grandissement transversal $\gamma_{ob} = \left(\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right)_{ob} = -2$.

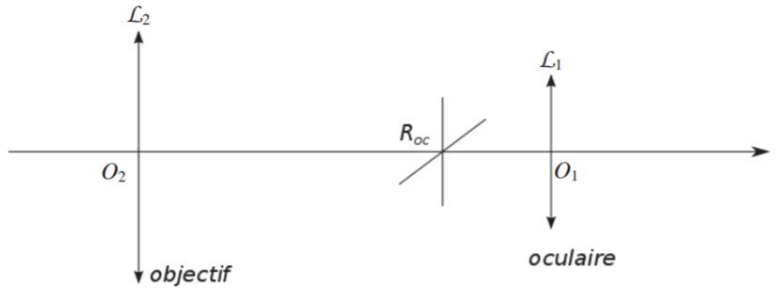


Figure 6 - Schéma d'un viseur à frontale fixe.

II.6 Comment règle-t-on l'oculaire par rapport au réticule ?

II.7 Préciser la position $\overline{F_2A}$ de l'objet visé par rapport à l'objectif en fonction de γ_{ob} et f_2'. On utilisera l'une des relations de grandissement (2). Faire l'application numérique.

II.8 Déterminer l'encombrement $\overline{O_2O_1}$ de la lunette en fonction de f_1', γ_{ob} et f_2'. Effectuer l'application numérique.

II.9 Valider vos résultats par un tracé de rayons

II.10 Citer une application de ce type de viseur.

Troisième partie - Description du dispositif expérimental

On complète le dispositif de lunette à frontale fixe précédent par :

- un miroir plan $\mathcal{M}_0$ centré sur M_0 et orthogonal à l'axe optique ;
- une lame semi-réfléchissante $\mathcal{L}_s$ centrée sur L_s et inclinée à 45 ° : $\overline{O_2L_s} = 50\,\text{mm}$;
- un miroir plan $\mathcal{M}_i$ centré sur M_i et incliné à 45 ° : $\overline{M_iL_s} = 100\,\text{mm}$;
- une lentille $\mathcal{L}_3$ convergente de distance focale f_3' : $f_3' = 150\,\text{mm}$;
- un **objet** constitué d'un réticule **mobile** R dont la **position** est **mesurable**.

L'ensemble ($\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$) forme un **système afocal** (figure 7).

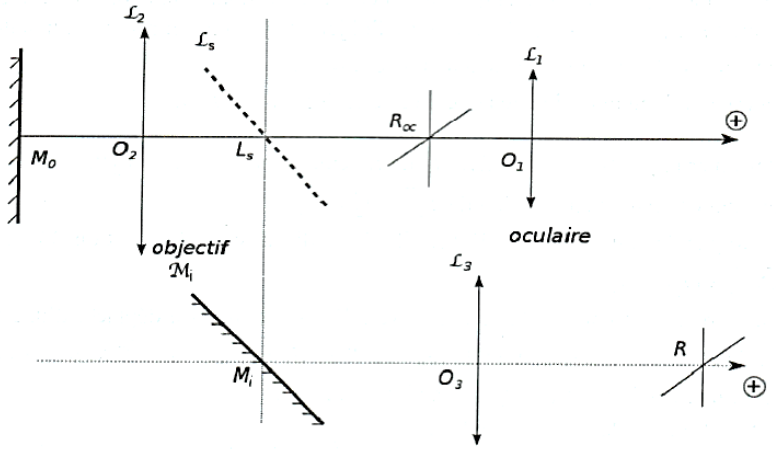


Figure 7 - Schéma du dispositif expérimental.

Analyse du système additionnel

II.11.a) Tracer symboliquement sur la figure C (document réponse) le trajet de la lumière issue de R et émergeant de l'oculaire.

II.11.b) L'association de la lentille $\mathcal{L}_2$ avec la lame semi réfléchissante $\mathcal{L}_s$, le miroir $\mathcal{M}_i$ et la lentille $\mathcal{L}_3$ forme un système afocal.

Définir la notion de système afocal.

Quelle doit être la distance $\overline{M_iO_3}$ en fonction de f_3', f_2', $\overline{O_2L_s}$ et $\overline{M_iL_s}$ afin de réaliser cette condition ? Faire l'application numérique.

II.11.c) On note R' l'image de R par l'ensemble du système additionnel constitué par $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{M}_i$, $\mathcal{L}_s$ et $\mathcal{L}_2$.

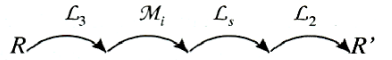


Figure 8 - Image R' de R par le système optique.

On sera attentif à l'algébrisation de l'axe optique et au sens effectif de propagation de la lumière.

Etablir, en fonction de f_2' et f_3', la relation liant la position $\overline{F_3'R}$ de l'objet R par rapport au foyer image de $\mathcal{L}_3$ à celle de son image R' donnée par $\overline{F_2R'}$.

II.11.d) On place l'objet R tel que $\overline{O_3R} = 150$ mm, comme sur la figure 7. Où se trouve son image $\overline{O_2R'}$ par le système optique ($\mathcal{L}_3$, $\mathcal{M}_i$, $\mathcal{L}_s$, $\mathcal{L}_2$) ?

II.11.e) Quel est son grandissement transversal ?

On utilise une méthode d'**autocollimation** à l'aide du miroir plan $\mathcal{M}_0$, placé devant l'objectif à la distance $\overline{O_2M_0} = \overline{O_2F_2} = -50$ mm .

Attention : la lunette est réglée en frontale fixe comme dans la deuxième partie.

On éclaire le réticule R par rapport à la question précédente. Il donne une nouvelle image R' par le système optique ($\mathcal{L}_3$, $\mathcal{M}_i$, $\mathcal{L}_s$, $\mathcal{L}_2$). R' sert alors d'objet au système (miroir $\mathcal{M}_0$, lunette de visée). On obtient une image R'' que l'on désire superposer à R_{oc} .

On observe à travers l'oculaire l'image nette de 2 réticules (R_{oc} et R'').

II.12.a) Déterminer la position particulière d_0 du réticule R telle que $d_0 = \overline{F_3'R}$.

Exprimer ce résultat en fonction de $\overline{F_2A}$, f_2' et f_3' .

II.12.b) On éloigne le miroir $\mathcal{M}_0$ de l'objectif d'une distance e. Sa position M_{01} est telle que $\overline{O_2M_{01}} = \overline{O_2F_2} - e$.

Afin de préserver une image nette à travers l'oculaire, on doit déplacer d'une valeur ε_1 le réticule R. La nouvelle position du réticule R est d_1 telle que $d_1 = \overline{F_3'R_1} = d_0 + \varepsilon_1$.

Déterminer le déplacement ε_1 en fonction de e, f_2' et f_3' .

II.12.c) Quel est l'intérêt du système étudié ?

II.12.d) Que dire du rapport entre les échelles sur les deux réticules ?

Quatrième partie - Application à la caractérisation d'une lame d'épaisseur *e* et d'indice *n*

II.13 Le miroir $\mathcal{M}_0$ et le réticule R sont placés initialement de telle sorte que : $\overline{O_2M_0} = \overline{O_2F_2} = -50$ mm, $d_0 = \overline{F_3'R}$.

De par le retour inverse de la lumière, on obtient le schéma de la figure 9.

	$\mathcal{L}_2$		$\mathcal{M}_0$		$\mathcal{L}_2$		$\mathcal{L}_s$		$\mathcal{M}_i$		$\mathcal{L}_3$	
R_{oc}		A_1		A_2		A_3		A_4		A_5		R

Figure 9 - Schéma du système optique.

On intercale la lame d'indice n d'épaisseur e entre le miroir $\mathcal{M}_0$ et l'objectif $\mathcal{L}_2$.

II.13.a) Analyser la composition du système optique à l'aide d'un schéma synoptique.

II.13.b) La position de la lame a-t-elle une influence ?

II.13.c) Montrer que le déplacement du réticule R vers une position d_2, telle que $d_2 = \overline{F_3'R''} = d_0 + \varepsilon_2$, permet de retrouver une image nette.

II.13.d) Exprimer ε_2 fonction de e, n, f_2' et f_3' .

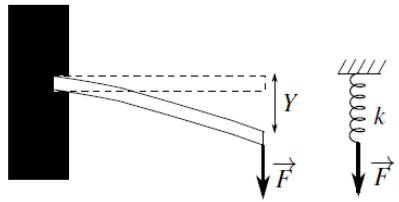
II.13.e) On donne $e = 0{,}1$ mm et on mesure $\varepsilon_2 = 0{,}6$ mm. Quel est l'indice n de la lame ?

II.14 Proposer une méthode utilisant ce système afin de trouver une autre équation reliant n et e.

Exercice 3 : Comme un goût de déjà vu...

Le verre est un matériau très dur. On peut toutefois le déformer légèrement sans le casser : on parle d'élasticité. Récemment, des expériences de biophysique ont été menées pour étudier l'ADN. Le capteur utilisé était simplement une fibre optique en silice amincie à l'extrémité de laquelle on accroche un brin d'ADN. L'expérience consistait à suivre la déformation de flexion de la fibre. La masse volumique du verre est $\rho = 2500\ \text{kg.m}^{-1}$.

La fibre de verre de longueur ℓ et de diamètre d est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la fibre est horizontale (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale F (on supposera que la force F reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extrémité libre de la fibre, celle-ci est déformée. L'extrémité est déplacée verticalement d'une distance Y que l'on appelle la flèche (voir figure).



La flèche Y est donnée par la relation suivante (on notera la présence du facteur numérique 7, sans dimension, qui est en fait une valeur approchée pour plus de simplicité) : $\dfrac{7\ell^3 F}{Ed^4}$, où E est appelé module d'Young du verre. Pour les applications numériques on prendra pour le module d'Young $E = 7.10^{10}$ S.I..

1. Quelle est l'unité S.I. du module d'Young E ?

2. En considérant uniquement la force F, montrer que l'on peut modéliser la fibre de verre par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E, d et ℓ.

3. Calculer numériquement k pour une fibre de longueur $\ell = 7$ mm et de diamètre $d = 10\ \mu$m.

On a tous fait l'expérience suivante : faire vibrer une règle ou une tige lorsqu'une de ses extrémités est bloquée. On cherche ici à trouver les grandeurs pertinentes qui fixent la fréquence des vibrations. L'extrémité de la tige vaut $Y(t)$ à l'instant t. On admet que lors des vibrations de la fibre, l'énergie cinétique de la fibre de verre est donnée par l'expression $E_c = \rho \ell d^2 \left(\dfrac{dY}{dt}\right)^2$. Son énergie potentielle élastique lorsque la flèche vaut Y est : $E_p = \dfrac{1}{2}\dfrac{Ed^4}{7\ell^3}Y^2$.

4. Écrire l'expression de l'énergie mécanique de la fibre en négligeant l'énergie potentielle de pesanteur.

5. Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du temps. En déduire l'équation différentielle qui régit les vibrations de la fibre.

6. Quelle est l'expression de la fréquence propre de vibration d'une tige de verre de module d'Young E, de longueur ℓ et de diamètre d ?

7. Calculer numériquement la fréquence des vibrations d'une fibre de verre de longueur 7 mm et de diamètre 0,01 mm.

Nom :
Prénom :

Document réponse

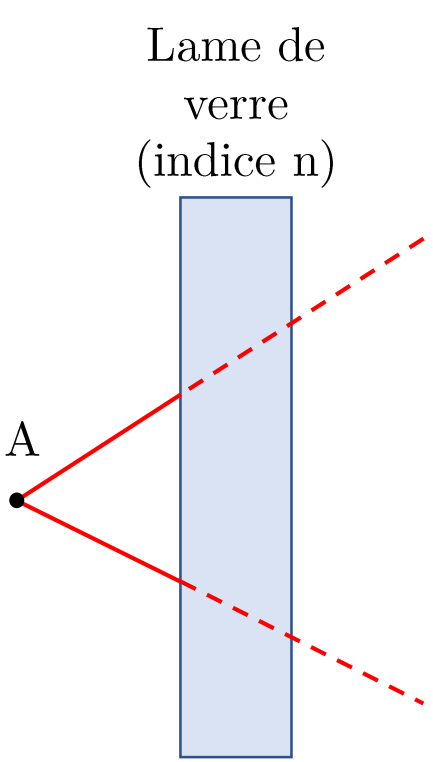


Figure A1

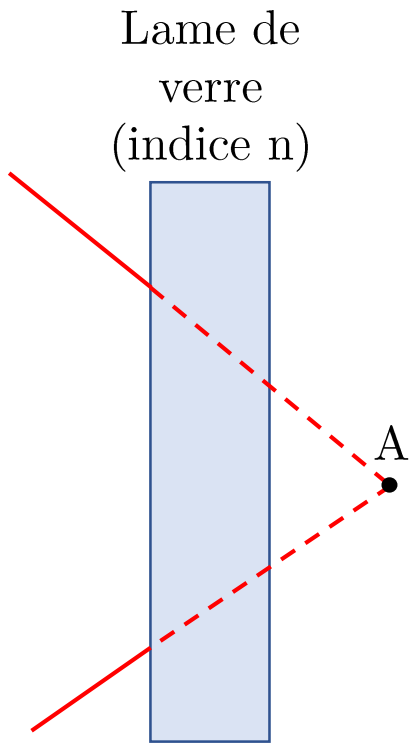


Figure A2

Document réponse

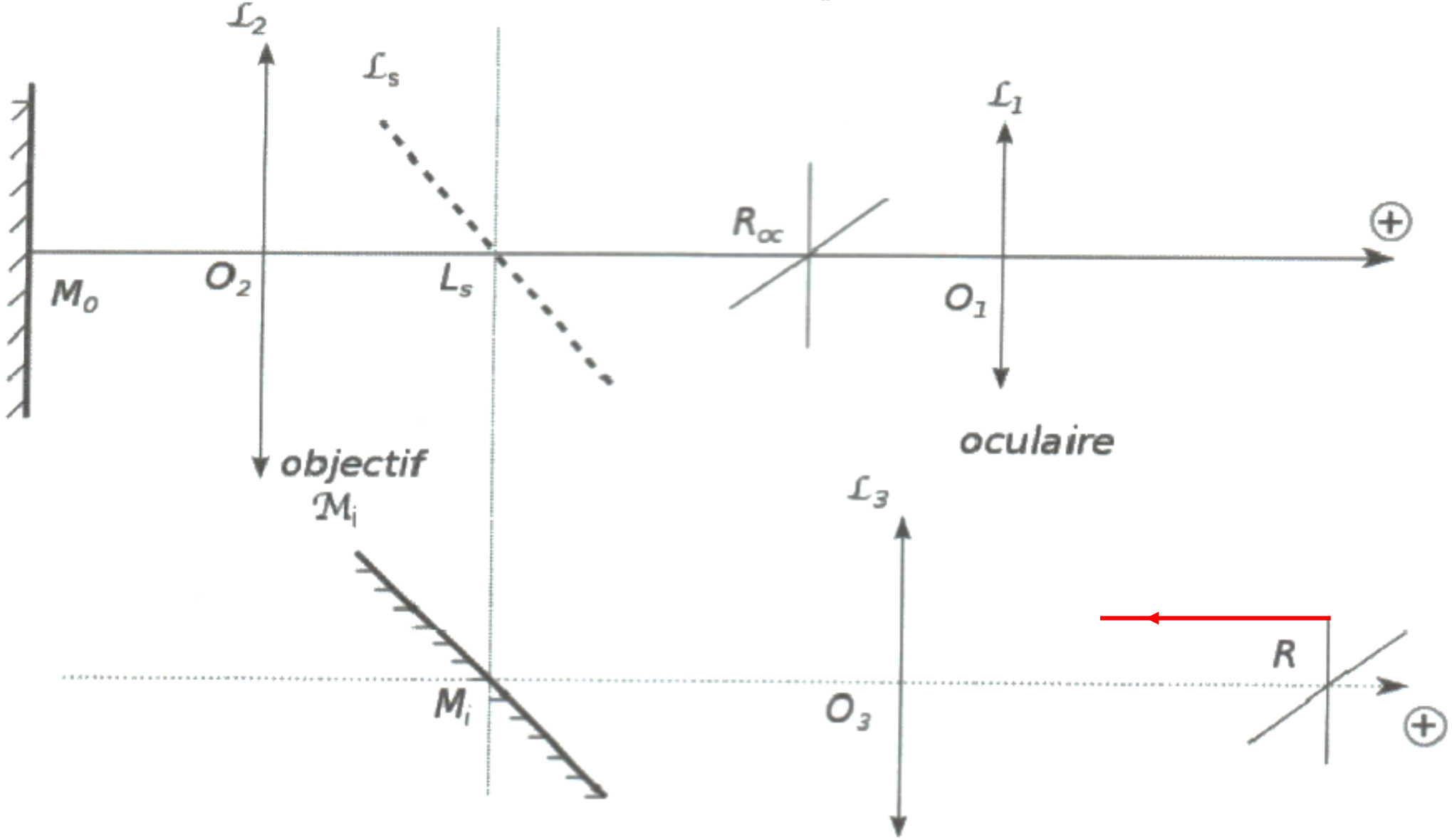


Figure C