II - Filtre RC

1. $\boxed{\omega_c = \frac{1}{RC}}$ pour un filtre RC. A.N : $\underline{\omega_c = 10^5 \text{ rad.s}^{-1}}$

Pour un filtre RC série classique, ω_c est la pulsation de coupure, pulsation à laquelle $|\underline{H}(\omega_c)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{dB}(\omega_c) = G_{dB\,max} - 3\text{dB}$

c'est le cas sur le diagramme, ω_c correspond bien à la pulsation de coupure

2. Le filtre à pour fonction de transfert : $\boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}}$ avec $H_0 = 1$

Dans le cas $\omega \ll \omega_c$, $\underline{H}(\omega) \simeq H_0$ indépendant de ω. L'asymptote en gain est donc la droite d'équation $G_{dB}(\omega) \simeq 0$ (axe des abscisse) et celle en phase est $\arg(\underline{H}) \simeq 0$ (axe des abscisses) (car $\underline{H}$ est réel)

3. quand $\omega \gg \omega_c$, $\underline{H}(\omega) \simeq \frac{\omega_c H_0}{j\omega}$ donc Asymptotes : $\begin{cases} G_{dB}(\omega) \simeq 20\log(\omega_c) - 20\log(\omega) \\ \arg(\underline{H}) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ (rappel : $H_0 = 1$) (complexe pur négatif)

4. $\underline{G_{dB}}$ diminue de $\underline{20\text{ dB}}$ mais ⚠ :

On demande ici de combien descend $|\underline{H}|$ pas G_{dB} ⚠ : $|\underline{H}| = \frac{\omega_c H_0}{\omega}$, si ω est multiplié par un facteur 10, $\boxed{|\underline{H}| \text{ est divisé par un facteur } 10.}$

5. $|\underline{H}|_{max} = H_0$, $|\underline{H}(\omega = \omega_c)| \underset{\text{définition}}{=} \frac{H_0}{\sqrt{2}} \underset{\text{caractéristique du filtre RC}}{=} \left|\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}\right| \Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + 1 = 2 \Rightarrow \underline{\omega = \omega_0} = \frac{1}{RC}$

quand $\omega = \omega_c$ soit $\boxed{\omega_c = \frac{1}{RC}}$

$\boxed{\text{Bande passante} = \omega_c - 0 = \omega_c}$ pour un filtre passe bas d'ordre 1

(idem question 1, $\underline{\omega_c = 10^5 \text{ rad.s}^{-1}}$ ~~pro~~ correspond à la figure)

6. $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$: on est en régime sinusoïdal forcé

on exprime le signal d'entrée en complexe : $\underline{e} = \underline{E}\,e^{j\omega t}$ avec $\underline{E} = E_m e^{j\varphi_e}$

D'après la def de la fonction de transfert, $\underline{s} = \underline{H} \times \underline{e} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \times \underline{E}\,e^{j\omega t}$

On repasse ensuite en notation réelle pour déterminer $s(t)$:

$\boxed{s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)}$ où $\begin{cases} S_m = |\underline{H}| \times |\underline{E}| = \frac{E_m}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \\ \varphi_s = \varphi_e + \arg(\underline{H}) = \varphi_e - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \end{cases}$

7.

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
S_m	2V	2V	$\sim$ 2V	$2.10^{-\frac{5}{2}} \simeq 10^{-2}$V
φ_m	$\frac{\pi}{4}$	$\sim\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4} - 0{,}5$	$-\frac{\pi}{4}$

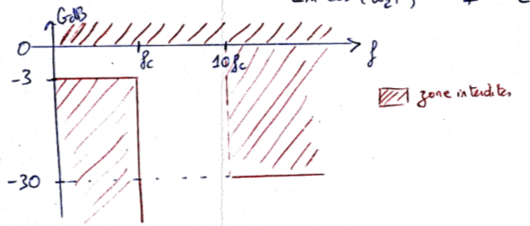
8. On peut traiter chaque signaux d'entrée indépendamment avec la fonction de transfert et sommer les signaux obtenus pour obtenir le signal de sortie (principe de superposition).

$$e(t) = E_m \cos(\omega_2 t) + E_m \cos\left(\omega_3 t + \frac{\pi}{4}\right) + E_m \cos\left(\omega_4 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\downarrow \underline{H} \qquad \downarrow \underline{H} \qquad \downarrow \underline{H}$$

$$s(t) \simeq E_m \cos(\omega_2 t) + E_m \cos\left(\omega_3 t + \frac{\pi}{4} - 0{,}5\right) + 10^{-2{,}5} \times E_m \cos(\omega_4 t - \pi)$$

9.



10. Il faut une pente de $-(30-3)$dB/décade impossible avec un filtre du 1[er] ordre

↳ Une possibilité serait de prendre un filtre du deuxième ordre en prenant $\omega_0 = 2\pi f_c$ et $Q \leq \frac{1}{2}$ pour qu'il n'y a pas de résonance (dépassement du gain à plus que 0dB interdit)

III – Suspension de VTT (difficulté : moyen)

Tout au long de l'exercice, le système étudié est l'ensemble du cadre et du vététiste, en mouvement par rapport au référentiel terrestre que l'on considère galiléen. Ce système est soumis à son poids $\vec{P}$, à la force $\vec{F}_r$ de rappel du ressort de la suspension et à la force $\vec{F}_a$ exercée par l'amortisseur.

1 Comme $z = z_e$ et $z_0 = 0$ sont des constantes, l'amortisseur n'exerce aucune force sur le vététiste, et la longueur du ressort est égale à z. La position d'équilibre est celle où la force exercée par le ressort sur M compense exactement le poids du VTT, soit

$$\vec{P} + \vec{F}_r = \vec{0} \qquad \text{soit} \qquad -mg\vec{u}_z - k(z_e - L_0)\vec{u}_z = \vec{0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{z_e = L_0 - \frac{mg}{k}.}$$

Le ressort est plus court qu'à vide, ce qui est logique à cause du poids du vélo et du vététiste.

2 Appliquons la loi de la quantité de mouvement au cadre du VTT dans le référentiel terrestre. Il est soumis à son poids et aux forces exercées par le ressort et l'amortisseur. Ainsi,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_r + \vec{F}_a \qquad \text{soit} \qquad m\ddot{z}\vec{u}_z = -mg\vec{u}_z - k\left[(z - z_0) - L_0\right]\vec{u}_z - \alpha(\dot{z} - \dot{z}_0)\vec{u}_z\,.$$

En projetant et en remplaçant z par $Z + z_e$ (donc $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$), on obtient

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = -mg - k(z_e - z_0) + kL_0 - \alpha\dot{z}_0$$

ce qui donne en remplaçant z_e par son expression

$$\boxed{m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = F \qquad \text{avec} \qquad F = kz_0 + \alpha\dot{z}_0}$$

F s'interprète comme une force verticale ressentie par le cadre en raison du caractère non plat du chemin. Vous avez tous déjà ressenti cet effet en voiture, par exemple en passant sur un dos d'âne.

3.a L'équation différentielle est linéaire. Le théorème de Fourier permet donc d'écrire toute solution comme une somme de ses solutions harmoniques.

3.b Le VTT est en mouvement forcé, par un forçage F sinusoïdal. Une fois le régime permanent atteint, ce qui est implicitement supposé, toutes les grandeurs dynamiques sont sinusoïdales de même pulsation que le forçage, et en particulier la vitesse v_z.

On utilise la représentation complexe pour déterminer son amplitude : $\underline{F} = F_m\,e^{j\omega t}$ et $\underline{v_z} = V_m\,e^{j(\omega t + \varphi)}$. Comme $v_z = \dot{z} = \dot{Z}$, $\underline{v} = j\omega\underline{Z}$. Passons l'équation différentielle obtenue en représentation complexe,

$$m(j\omega)^2\underline{Z} + \alpha j\omega\underline{Z} + k\underline{Z} = \underline{F} \qquad \text{d'où} \qquad mj\omega\underline{v_z} + \alpha\underline{v_z} + k\frac{\underline{v_z}}{j\omega} = \underline{F}\,,$$

et ainsi

$$\underline{v_z} = \frac{\underline{F}}{mj\omega + \alpha - \dfrac{jk}{m}}$$

L'amplitude de la vitesse est au final

$$\boxed{V_\mathrm{m} = |\underline{v_z}| = \frac{F_\mathrm{m}}{\sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)^2}}}$$

4 $\underline{H}$ est une fonction de transfert mécanique. Elle représente la façon dont les oscillations du chemin (via $\underline{z_1}$) se répercutent sur le cadre (via $\underline{Z}$) par l'intermédiaire de la suspension, et sont donc ressenties par le vététiste. Comme $\underline{v_z} = j\omega\underline{Z}$ et $\underline{F} = k\underline{z_0} + j\omega\alpha\underline{z_0}$, on obtient en remplaçant

$$j\omega\underline{Z} = \frac{k\underline{z_0} + j\omega\alpha\underline{z_0}}{mj\omega + \alpha - \dfrac{jk}{m}}$$

d'où

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}}{\underline{z_0}} = \frac{k + j\alpha\omega}{k + j\alpha\omega - m\omega^2}$$

En utilisant $\alpha = 2\xi\sqrt{mk}$ et en divisant numérateur et dénominateur par k, on aboutit à

$$\boxed{\underline{H}(u) = \frac{1 + 2j\xi u}{1 - u^2 + 2j\xi u}}$$

5 Pour ressentir le moins possible les vibrations dues aux cailloux, il faut que $|\underline{H}|$ soit aussi petit que possible, et éviter absolument la situation de résonance. D'après la figure, cela correspond à $u \gg 1$, soit une pulsation ω élevée, donc à une vitesse élevée. **Pour minimiser les vibrations, il faut donc rouler aussi vite que possible sur les cailloux**. Évidemment, il en va tout autrement de l'adhérence !

IV – Electroaimant (difficulté : moyen)

1 Les deux branches forment un diviseur de courant, d'où

$$\frac{\underline{I}}{\underline{I'}} = \frac{\underline{Y}_{RL}}{\underline{Y}_{RL} + \underline{Y}_C} = \frac{1}{1 + \underline{Z}RL\underline{Y}_C} = \frac{1}{1 + jC\omega(R + jL\omega)}$$

En inversant la relation,

$$\boxed{\underline{I'} = 1 + jC\omega(R + jL\omega)\underline{I}\,.}$$

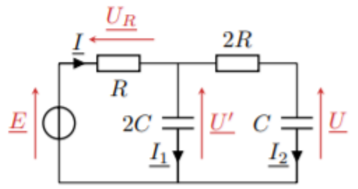


Figure 1 – **Schéma des notations.**

2 En développant,

$$\underline{I'} = \left[(1 - LC\omega^2) + jRC\omega\right]\underline{I}$$

d'où en prenant le module

$$I'_\mathrm{m}{}^2 = \left[(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2\right] I_\mathrm{m}^2$$

Pour déterminer la valeur de C qui minimise I'_m, calculons la dérivée par rapport à C,

$$\frac{\mathrm{d}I'_\mathrm{m}{}^2}{\mathrm{d}C} = \left[2 \times (1 - LC\omega^2) \times (-L\omega^2) + 2R^2\omega^2 C\right] I_\mathrm{m}^2 = 2\omega^2\left[-L + L^2C\omega^2 + R^2C\right]$$

La dérivée s'annule pour

$$\boxed{C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2} = 8{,}1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}\,.}$$

3 En reprenant les résultats précédents,

$$I'_\mathrm{m} = \sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}\,I_\mathrm{m} = 7{,}6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{A}\,.$$

L'ajout du condensateur permet de diviser par 400 l'amplitude du courant qui alimente l'électroaimant, et donc de réduire les pertes Joule en ligne par 16 000 !

4 L'admittance équivalente à l'association s'écrit

$$\underline{Y} = \underline{Y}_{RL} + \underline{Y}_C = \frac{1}{R + jL\omega} + jC\omega$$

soit en remplaçant C par son expression

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + jL\omega} + \frac{jL\omega}{R^2 + L^2\omega^2} = \frac{R - jL\omega}{R^2 + L^2\omega^2} + \frac{jL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}$$

et finalement

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2}\,.$$

On y reconnaît l'admittance d'une **résistance**,

$$\boxed{R_\text{éq}(\omega) = R + \frac{L^2\omega^2}{R}\,.}$$

5 La tension aux bornes de l'électroaimant s'écrit

$$\underline{U} = (R + jL\omega)\underline{I}\,.$$

Comme $\underline{I}$ est le même avec et sans condensateur (à un déphasage près), alors $\underline{U}$ ne dépend pas de C, au même déphasage près. On en conclut que l'ajout du condensateur **ne modifie pas la puissance fournie par le réseau électrique** à l'électroaimant ... tout en diminuant considérablement les pertes en ligne.

> ***Complément culturel :*** *Nous avons montré en cours que la puissance moyenne reçue par un dipôle quelconque s'écrit*
>
> $$\langle \mathcal{P} \rangle = U_\text{eff}\, I_\text{eff} \cos\varphi$$
>
> *avec φ l'argument de l'impédance complexe du dipôle.*
>
> *Ici, l'ajout du condensateur a permis de rendre le dipôle électroaimant + condensateur équivalent à une résistance, c'est-à-dire d'avoir $\varphi = 0$ donc $\cos\varphi = 1$. Comme la tension efficace U_eff demeure fixée, l'exercice a permis de constater que maximiser $\cos\varphi$ permet de minimiser l'intensité d'alimentation I'_eff.*
>
> *Cette méthode est très générale et porte un nom : on parle de **redressement du facteur de puissance**, le facteur de puissance étant le nom donné à $\cos\varphi$. En France, la facturation électrique industrielle dépend du facteur de puissance des usines : meilleur il est, plus les tarifs sont bas, car les pertes en ligne sont moindres.*

V – Bond sur la Lune (difficulté : facile)

1 On étudie le mouvement du capitaine Haddock, modélisé par un point matériel M de masse m en évolution dans le référentiel lunaire $\mathcal{R}$, supposé galiléen. Il n'est soumis qu'à son propre poids $\vec{P} = m\vec{g}_L$. D'après la loi de la quantité de mouvement,

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{P} = m\vec{g}_L \qquad \text{soit} \qquad \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{g}_L$$

Le mouvement étant uniformément accéléré, il va être plan, le repérage le plus naturel pour l'étudier est un repérage cartésien dont un axe est confondu avec l'accélération et l'origine à la position initiale du capitaine Haddock. On peut alors construire le schéma figure 2, où on représente à la fois la situation initiale pour introduire les notations et une situation quelconque.

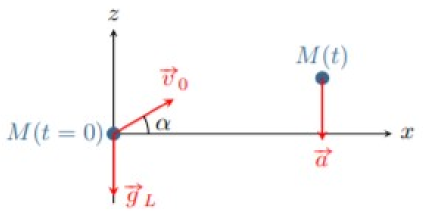


Figure 2 – **Saut du capitaine Haddock sur la Lune.**

En projection, la loi de la quantité de mouvement donne (les constantes se déterminent à partir des conditions initiales)

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = -m\,g_L \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \text{cte} = v_0\cos\alpha \\ \dot{z} = -g_L t + \text{cte} = g_L t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

et finalement

$$\boxed{\begin{cases} x = v_0\cos\alpha\, t + \text{cte} = v_0\cos\alpha\, t \\ z = -\dfrac{1}{2}g_L t^2 + v_0\sin\alpha\, t + \text{cte} = -\dfrac{1}{2}g_L t^2 + v_0\sin\alpha\, t \end{cases}}$$

2 D'après l'équation du mouvement en x,

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}\,.$$

En insérant ce résultat dans l'équation sur z, on trouve l'équation de la trajectoire

$$z = -\frac{1}{2}g_L\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + v_0\sin\alpha\,\frac{x}{v_0\cos\alpha} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{z = -\frac{g_L}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha\, x}$$

3 La distance L parcourue par la capitaine Haddock en sautant est telle que $z(L) = 0$, c'est-à-dire

$$0 = L\left(-\frac{g_L}{2v_0^2\cos^2\alpha}L + \tan\alpha\right)$$

Mathématiquement, $L = 0$ est solution, mais c'est bien sûr le point de départ du saut. La solution physiquement pertinente est donc telle que

$$-\frac{g_L}{2v_0^2\cos^2\alpha}L + \tan\alpha = 0 \qquad \text{soit} \qquad L = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g_L} = \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g_L}$$

et finalement

$$\boxed{L = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g_L}}$$

> *Rappel mathématique :* $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

4 La distance L' que le capitaine Haddock parcourrait sur Terre avec le même saut serait

$$L' = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g_T}$$

Ainsi,

$$\boxed{L = \frac{g_T}{g_L}L' = 6L' = 9\,\text{m}\,.}$$

VI – Mouvement elliptique (difficulté : moyen)

En toute généralité on a $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{u_r} + \rho\dot{\theta}\vec{u_\theta}$. Dans le cas présent et en notant la constante $\rho^2\dot{\theta} = pu$ (u a la dimension d'une vitesse) on a :

$$\dot{\rho} = \frac{pe\dot{\theta}\sin(\theta)}{(1+e\cos(\theta))^2} = \frac{e}{p}\rho^2\dot{\theta}\sin(\theta) = eu\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \rho\dot{\theta} = \frac{1}{\rho}\rho^2\dot{\theta} = u(1+e\cos(\theta))$$

En toute généralité on a $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u_\theta}$.

Dans le cas présent il est plus astucieux de partir de la forme trouvée pour la vitesse à la question précédente :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(eu\sin(\theta))\vec{u_r} + (eu\sin(\theta))\frac{d}{dt}(\vec{u_r}) + \frac{d}{dt}(u(1+e\cos(\theta)))\vec{u_\theta} + (u(1+e\cos(\theta)))\frac{d}{dt}(\vec{u_\theta})$$

$$\vec{a} = (eu\dot{\theta}\cos(\theta))\vec{u_r} + (eu\sin(\theta))\dot{\theta}\vec{u_\theta} + (-ue\dot{\theta}\sin(\theta))\vec{u_\theta} + u(1+e\cos(\theta))(-\dot{\theta})\vec{u_r}$$

Au final on a donc une accélération radiale $\vec{a} = -u\dot{\theta}\vec{u_r}$. u est une constante mais $\dot{\theta}$ non. L'accélération radiale n'est pas constante à cause du caractère elliptique de la trajectoire (la vitesse angulaire augmente quand le rayon diminue : c'est la "loi des aires" de Kepler.

$||\vec{v}|| = \sqrt{e^2u^2\sin^2\theta + u^2(1+\cos\theta)^2} = u\sqrt{e^2+2e\cos\theta+1}$. La vitesse est donc maximale lorsque $\cos\theta = 1$ ($\theta = 0$: périgée) et minimale lorsque $\cos\theta = -1$ ($\theta = \pi$: apogée) $||\vec{a}|| = u|\dot{\theta}| = pu^2/\rho^2$. L'accélération est donc maximale lorsque ρ est minimal (périgée) et minimale lorsque ρ est maximal (apogée).