DS n°4 – Filtrage et cinématique du point

10 Janvier, 4H, sans calculettes

Consigne pour le bon déroulement de l'épreuve :

- Faire des **schémas** clairs et soignés pour introduire vos notations. Vous utiliserez comme notation complexe une barre sous la variable (pour les fonctions de transfert ou les impédances par ex.). Pour la cinématique vous utiliserez un indice du type « $_{M/R}$ » pour préciser de quel point vous parlez et dans quel référentiel.
- Le soin apporté à la copie sera valorisé (encadrer les résultats, souligner les A.N., pas de crayon papier).
- Le soin apporté à la démonstration sera valorisé (ne parachutez pas une relation du type U=RI sans dire d'où elle provient ou, comme expliqué précédemment, sans **schéma** introduisant U,R et I).
- Si vous bloquez sur une question (peut être n'avez-vous pas fait un **schéma** clair et soigné ??), passez à la suivante en laissant un vide pour y revenir plus tard.
- Il est important que vous preniez connaissance de tout le sujet, prendre 10 à 20 minutes au début pour le faire est très souvent bénéfique.

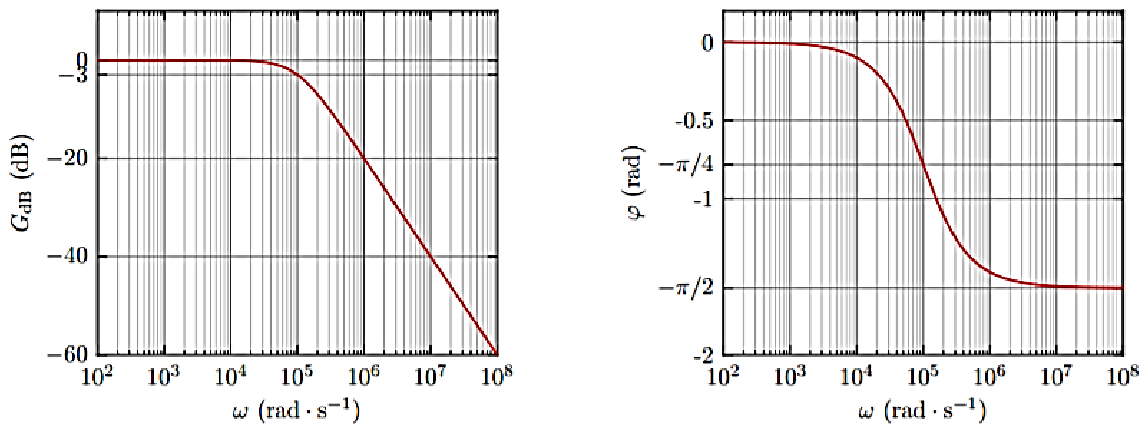
Cogitez bien !

I – Questions de cours

1. Donner la loi des mailles et la loi des nœuds (on utilisera un schéma clair et soigné pour introduire les notations).
2. Exprimer les conditions de continuité sur le courant ou la tension aux bornes d'une bobine et d'un condensateur.
3. Donner la **définition** de l'impédance d'un dipôle **quelconque** en régime sinusoïdal forcé. (*je mets -1 à celui/celle qui me répond « c'est une résistance » ou « en Ohm » ou qui ne fait pas de* ***schéma***).
4. Donner les formules de l'impédance complexe d'une bobine, d'un condensateur et d'une résistance en convention récepteur (faire un **schéma**…). Donner le comportement à haute et basse fréquence d'une bobine et d'un condensateur.
5. Exprimer l'impédance complexe équivalente à l'association d'un condensateur et d'une bobine en série et celle à une association d'un condensateur et d'une bobine en parallèle.
6. Montrer qu'un circuit RC série peut avoir un comportement de type passe haut pour le courant sans faire de calculs. Donner ensuite l'expression de la fonction de transfert correspondante et vérifier le résultat précédent.
7. A partir du résultat de la question 6, montrer que la pente à basse fréquence d'un passe-haut d'ordre 1 est de +20dB/decades et justifier à partir d'une expression de la fonction de transfert le terme de pseudo-dérivateur pour ce filtre.
8. Donner l'expression du vecteur position dans un repère cartésien et cylindrique (faire un **schéma** clair et soigné précisant les axes du repère cartésiens et les deux différentes bases).
9. Comment s'exprime le vecteur vitesse dans un repère cartésien et cylindrique ? Et le vecteur accélération ?
10. Donner l'expression du vecteur déplacement élémentaire dans un repère cartésien et cylindrique.

II – Filtre RC (difficulté : facile)

Le diagramme de Bode du filtre RC, calculé numériquement pour $R = 1\,\text{k}\Omega$ et $C = 10\,\text{nF}$, est représenté ci-dessous.



1 - Calculer numériquement la pulsation caractéristique ω_c pour ce filtre. Commenter en lien avec le diagramme.

On cherche maintenant à interpréter les zones rectilignes dans le diagramme en gain et en phase.

2 - On se place dans la limite très basse fréquence : $\omega \ll \omega_c$. Établir l'équation des asymptotes en gain et en phase à partir de la fonction de transfert et comparer au diagramme.

3 - On se place dans la limite très haute fréquence : $\omega \gg \omega_c$. Établir l'équation des asymptotes en gain et en phase à partir de la fonction de transfert et comparer au diagramme.

4 - De combien diminue $|\underline{H}|$ lorsque la pulsation du signal d'entrée passe de $3 \cdot 10^5\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ à $3 \cdot 10^6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$?

5 - Déterminer la pulsation de coupure et la bande passante du filtre RC. Le vérifier sur le diagramme de Bode

6 Un signal harmonique $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ est envoyé en entrée du filtre. Exprimer l'amplitude S_m et la phase φ_s du signal de sortie associé en fonction du module et de l'argument de la fonction de transfert.

7 On suppose $E_m = 2\,\text{V}$ et $\varphi_e = \pi/4$. En exploitant le diagramme de Bode, calculer numériquement S_m et φ_s pour

$$\omega_1 = 1 \cdot 10^2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \omega_2 = 3 \cdot 10^3\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \omega_3 = 5 \cdot 10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \qquad \omega_4 = 2 \cdot 10^7\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Commenter les valeurs numériques d'amplitude.

8 - On considère maintenant un signal d'entrée e de la forme

$$e(t) = E_\mathrm{m}\cos(\omega_2 t) + E_\mathrm{m}\cos\left(\omega_3 t + \frac{\pi}{4}\right) + E_\mathrm{m}\cos\left(\omega_4 t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Donner la forme approchée du signal de sortie s.

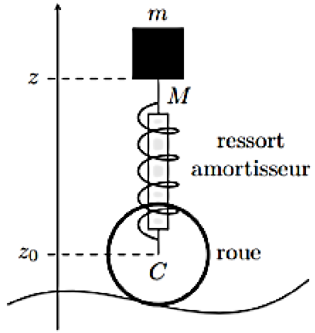
9 - Le cahier des charges d'un filtre passe-bas indique les caractéristiques suivantes :

- Gain maximal : 0 dB ;
- Fréquence de coupure à -3 dB : $f_c = 1$ kHz ;
- Atténuation des fréquences supérieures à 10 kHz : au moins 30 dB.

Construire le gabarit d'un tel filtre.

10 - Est-ce qu'un filtre RC série peut remplir les conditions du cahier des charges ? Dans le cas contraire, quel autre filtre peut convenir ? Commentez.

III – Suspension de VTT (difficulté : moyen)



Le but de cet exercice est d'étudier les caractéristiques d'une suspension de VTT. Le VTT est modélisé par un solide de masse m décrivant le cadre et le vététiste, repéré par la position d'un point M, posé sur une unique suspension. L'effet de la roue arrière n'est pas pris en compte.

La suspension est modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0 attaché en M dont l'autre extrémité est fixée au centre C de la roue, qui suit exactement le profil du chemin. Les positions de M et C sont repérées par leurs abscisses z et z_0 sur un axe vertical Oz ascendant tel que $z_0 = 0$ corresponde à la position moyenne du chemin. Outre le ressort, la suspension contient un amortisseur fluide de coefficient d'amortissement α. L'effet de l'amortisseur sur le mouvement de M se modélise par une force

$$\vec{F}_\mathrm{a} = -\alpha(v_z - v_{z0})\vec{u}_z$$

où $v_z = \dot{z}$ et $v_0 = \dot{z}_0$ sont les vitesses verticales respectives de M et C. La raideur k et le coefficient α peuvent être réglés par l'intermédiaire de la pression en huile et en air dans la suspension.

1 - Lorsque le VTT se déplace sur une route plate et lisse, $z_0 = 0$, et la cote z est constante, de valeur z_e, en régime dit stabilisé. Déterminer z_e en fonction de m, g, k et L_0.

2 - Considérons maintenant le VTT se déplaçant sur un chemin bosselé. On pose $Z(t) = z(t) - z_\mathrm{e}$. Montrer que $Z(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$m\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ = F(t)\,,$$

où $F(t)$ est une fonction à déterminer, dépendant de z_0, de v_0 et des constantes α et k caractéristiques de la suspension. Préciser le sens physique de F.

3 - On considère le cas où le profil du chemin est tel que $F(t)$ est une fonction sinusoïdale d'amplitude F_m et de pulsation ω.

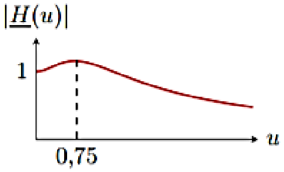
3.a - Pourquoi ne perd-on pas en généralité en faisant cette hypothèse ?

3.b - Justifier que la vitesse v d'oscillation verticale du VTT est également sinusoïdale de même pulsation que F. Calculer son amplitude V_m en fonction de F_m.

4 - La fonction de transfert de la suspension est définie par $\underline{H} = \underline{Z}/\underline{z_0}$, et on introduit les paramètres adimensionnés

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \qquad \xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}} \qquad \text{et} \qquad u = \frac{\omega}{\omega_0}\,.$$

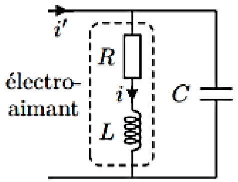
Que représente physiquement $\underline{H}$? Exprimer $\underline{H}$ en fonction de ξ et u.



Pour un VTT se déplaçant à la vitesse (horizontale !) V sur un chemin fait de cailloux de taille typique ℓ, le spectre d'excitation est maximal autour de $\omega = 2\pi V/\ell$. La figure ci-contre représente l'allure de $|\underline{H}(u)|$ pour $\xi = 1$.

5 - Pour un meilleur confort, vaut-il mieux rouler vite ou lentement ? Commenter.

IV – Electroaimant (difficulté : moyen)



Un électroaimant de levage est un dispositif industriel permettant de soulever des pièces métalliques à partir de champs magnétiques intenses. On étudie un tel appareil en le modélisant électriquement par une bobine d'inductance $L = 1{,}25$ H dont les spires ont une résistance interne $R = 1\,\Omega$. Cette bobine est traversée par un courant i sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz dont l'amplitude $I_\mathrm{m} = 30$ A est imposée pour le bon fonctionnement du dispositif.

Ce courant étant de forte puissance, les pertes par effet Joule dans les câbles d'alimentation de l'électroaimant sont non négligeables. Pour les diminuer, une méthode usuelle consiste à installer un condensateur de capacité C en parallèle de l'électroaimant. On note alors i' l'intensité du courant dans les câbles d'alimentation du dispositif, dont l'amplitude I'_m est inférieure à l'amplitude I_m du courant qui traverse l'électroaimant.

1 - Exprimer l'amplitude complexe $\underline{I}'$ en fonction de l'amplitude complexe $\underline{I}$.

2 - Calculer la valeur C à donner au condensateur pour minimiser l'amplitude I'_m tout en conservant I_m fixée. On pourra raisonner sur ${I'_\mathrm{m}}^2$.

3 - Calculer numériquement la valeur de I'_m dans la configuration optimale. Commenter.

4 - À quel dipôle l'association électroaimant-condensateur est-elle équivalente à la fréquence de travail ?

5 - Calculer la tension aux bornes de l'électroaimant. Dépend-elle de C ? Conclure en termes de puissance fournie.

V – Bond sur la Lune (difficulté : facile)

Dans l'album de Tintin *On a marché sur la Lune*, le capitaine Haddock s'étonne de pouvoir faire un bond beaucoup plus grand que sur la Terre. Le but de cet exercice est de déterminer la longueur de ce bond.

On assimile le mouvement du capitaine Haddock à celui de son centre d'inertie. Il saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\alpha = 30°$ avec le sol. On note g_L l'accélération de la pesanteur à la surface de la Lune, environ six fois plus faible que sur Terre.

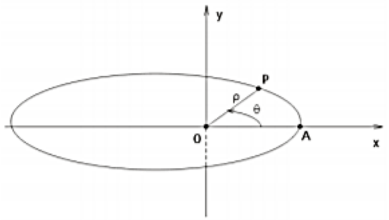
1 - Établir l'équation du mouvement.

2 - En déduire l'équation de la trajectoire du centre d'inertie du capitaine Haddock.

3 - Exprimer la distance L qu'il a parcourue en sautant en fonction de v_0, α et g_L.

4 - En supposant que le capitaine Haddock est capable de sauter 1,5 m sur Terre et en admettant qu'il n'est pas gêné par son scaphandre, déterminer numériquement la distance L.

VI – Mouvement elliptique (difficulté : moyen)



Un satellite décrit une trajectoire elliptique (voir Figure) dont l'équation en coordonnées polaires (avec l'origine au foyer) est :

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$$

ou p et $0 < e < 1$ sont deux paramètres constants, respectivement le paramètre et l'excentricité de l'ellipse). On sait par ailleurs que la conservation du moment cinétique implique :

$$\rho^2\dot{\theta} = \mathrm{C^{te}}$$

1. Déterminer la vitesse du satellite en un point quelconque, en coordonnées polaires .
2. En déduire le vecteur accélération et montrer que celle-ci est centrale. Pourquoi n'est-elle pas constante ?
3. En quels points la vitesse et l'accélération sont-elles minimales ou maximales ? Représenter les vecteurs correspondants sur la trajectoire.