

# DS n°5 de Physique-Chimie

PTSI 2019-2020

- *L'usage de calculatrices est interdit.*
- *Les parties peuvent être traitées de manière indépendantes.*
- *Vous avez 4h, travaillez bien!*

## 1 Questions de cours

### 1.1 Du déjà vu? Mais oui!

1. Montrer qu'un circuit RC série peut avoir un comportement de type passe haut pour le courant sans faire de calculs. Donner ensuite l'expression de la fonction de transfert correspondante et vérifier votre résultat.
2. Montrer que la pente à basse fréquence d'un passe-haut d'ordre 1 est de +20dB/decades et justifier à partir d'une expression de la fonction de transfert le terme de pseudo-dérivateur pour ce filtre.
3. Donner l'expression du vecteur position dans un repère cartésien et cylindrique (faire un schéma clair et soigné précisant les axes du repère cartésien et les deux différentes bases).
4. Comment s'exprime le vecteur vitesse dans un repère cartésien et cylindrique? Et le vecteur accélération?
5. Donner l'expression du vecteur déplacement élémentaire dans un repère cartésien et cylindrique.

### 1.2 Du nouveau!

6. On note de manière compact une équation bilan d'une réaction chimique :  $\sum_i \nu_i A_i = 0$ . A quoi correspondent l'indice  $i$  et les termes  $A_i$  et  $\nu_i$ ?
7. Définir l'avancement de la réaction. Relier cette grandeur à la quantité de matière initiale (notée  $n_{i,0}$ ) et à un instant quelconque de l'avancement (notée  $n_i$ ) de n'importe quelle "... "  $A_i$  (utilisez le terme approprié à la place des pointillés pour désigner  $A_i$  dans votre réponse).
8. Donner l'expression des activités chimiques de constituants sous forme liquide, solide, gazeux et en milieux aqueux en fonction de grandeurs physiques usuelles.
9. Comment s'exprime le quotient réactionnel d'une réaction dont l'équation bilan s'écrit  $\sum_i \nu_i A_i = 0$ ?
10. Dans le cas où un système physico-chimique est à l'équilibre thermodynamique, que vérifie le quotient réactionnel? Comment s'appelle cette loi? Que vérifie le quotient réactionnel lorsque la réaction évolue dans le sens indirect?

## 2 Etude d'une particule chargée : cyclotron et spectromètre de masse

- On considère un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Une particule chargée de charge  $q$  positive et de masse  $m$  pénètre avec un vecteur vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  au point  $O$  de coordonnées  $(0, 0, 0)$  dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  perpendiculaire à  $\vec{v}_0$  (Figure 1).
  - Montrer que la norme de la vitesse de la particule est constante.
  - Montrer que la trajectoire est plane.
  - On admet que la trajectoire est circulaire. Montrer que le rayon est égal à :

$$R = \frac{mv_0}{qB}$$

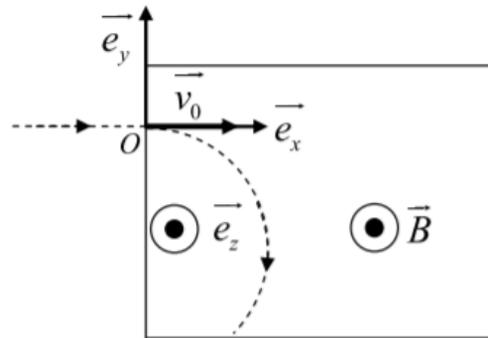


FIGURE 1 – Trajectoire d'une particule de charge  $q$  positive dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme.

- Pour séparer les deux isotopes naturels de l'Uranium (l'uranium 238 et l'uranium 235), il avait été envisagé d'utiliser un spectrographe de masse. Cet appareil comporte trois parties, représentées en Figure 2, où règne un vide poussé.
 

Les atomes d'uranium sont ionisés dans une chambre d'ionisation en  $U^+$  (de charge électrique  $q_{U^+} = e$ ) d'où ils sortent par la fente  $F_1$  avec une vitesse négligeable. Ces ions sont accélérés par un champ électrostatique uniforme imposé par une tension  $W = V_{P_2} - V_{P_1}$  entre les plaques  $P_1$  et  $P_2$ . Enfin, les ions pénètrent dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  ( $B = 0,1$  T) perpendiculaire au plan de la figure. Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayons  $R_1$  et  $R_2$  et parviennent dans deux collecteurs  $C_1$  et  $C_2$ . Les masses de l'uranium 235 et de l'uranium 238 sont :  $m_{U5} = 235$  u.m.a. et  $m_{U8} = 238$  u.m.a.. Une unité de masse atomique (u.m.a.) vaut :  $1 \text{ u.m.a.} \simeq 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

  - Quel est le signe de la tension  $W$  ? Justifier.
  - Donner l'expression littérale de la vitesse  $v_{U8}$  de l'isotope  $^{238}U^+$  en  $F_2$ , en fonction de  $e$ ,  $W$  et  $m_{U8}$ . Justifier votre réponse.
  - Calculer la valeur de la tension  $W$  pour que la distance entre les collecteurs  $C_1$  et  $C_2$  soit égale à  $d = 2$  cm.

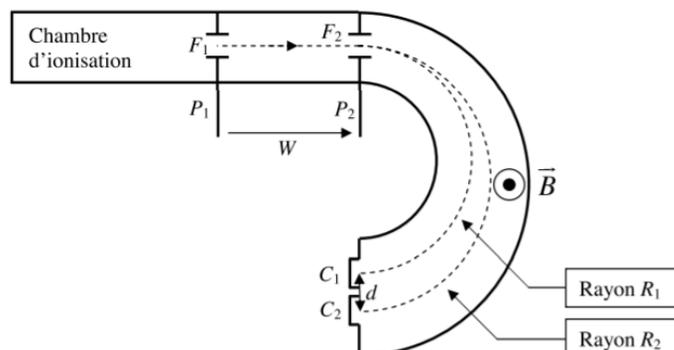


FIGURE 2 – Schéma de principe du spectrographe de masse.

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux  $D_1$  et  $D_2$  dénommés *dees* et séparés par un intervalle étroit (Figure 3). Un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  ( $B = 0,1 \text{ T}$ ) règne à l'intérieur des *dees*, sa direction est parallèle à l'axe des demi-cylindres.

Un champ électrostatique variable  $E$  peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les *dees* en appliquant une tension alternative sinusoïdale  $u(t)$  qui atteint sa valeur maximale  $U_m = 10^5 \text{ V}$  lorsque le proton traverse cet espace.

Les protons, de masse  $m_P = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  et de charge électrique  $q_P = e$ , sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. Dans chaque *dee*, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon croissant. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est  $R_S = 50 \text{ cm}$ .

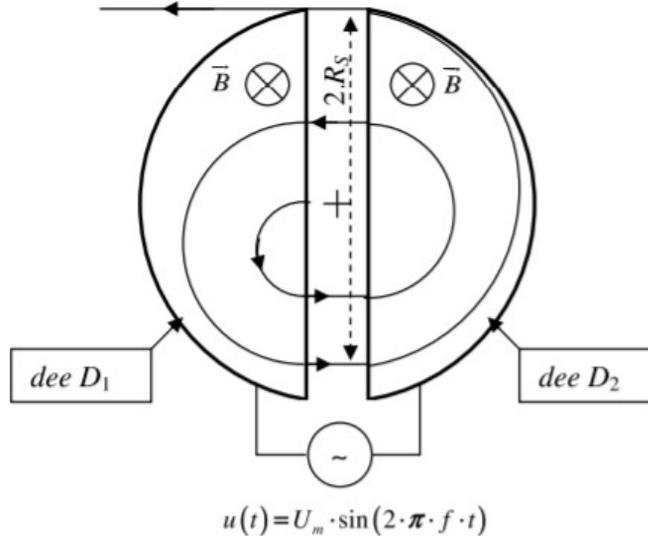


FIGURE 3 – Schéma de principe du cyclotron.

1. Donner l'expression littérale de la durée  $T_{1/2}$  mise par un proton pour effectuer un demi-tour en fonction de  $m_P$ ,  $e$  et  $B$ . Qu'en déduisez-vous ?
2. Justifier le choix d'une tension  $u(t)$  alternative.
3. En déduire l'expression, puis la valeur de la fréquence  $f$  de la tension alternative sinusoïdale  $u(t) = U_m \sin(2\pi ft)$  pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée. On négligera le temps de parcours d'un *dee* à l'autre.
4. Déterminer l'expression, puis la valeur de l'énergie cinétique  $E_{CS}$  des protons à la sortie du cyclotron.
5. Déterminer l'expression du nombre de tours  $N$  effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de  $e$ ,  $R_s$ ,  $B$ ,  $m_P$  et  $U_m$ . Effectuer l'application numérique.
6. Puissance rayonnée : pour une particule non relativiste, toute particule chargée de charge  $q$  et d'accélération  $a$  rayonne une puissance  $P_r$ , donnée par la formule de Larmor :

$$P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$$

On rappelle que  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

- (a) Montrer qu'une particule chargée de charge  $q$ , de vitesse  $v$ , qui décrit une trajectoire circulaire uniforme de rayon  $R$ , rayonne une puissance  $P_r$  de la forme :  $P_r = \alpha v^4$ . Exprimer le coefficient  $\alpha$  en fonction de  $q$ ,  $c$ ,  $\mu_0$  et  $R$ .
- (b) Calculer l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon  $R_S = 50 \text{ cm}$ .
- (c) Conclure.

### 3 Un pilote d'aérogliasseur qui aime les bosses

Un pilote d'aérogliasseur s'amuse à prendre une bosse. La masse de l'ensemble est de  $m = 200$  kg et les hélices délivrent une puissance totale de  $P = 2000$  W. On suppose que l'aérogliasseur ne subit aucun frottements (du sol ou de l'air) et que la totalité de la puissance délivrée par les hélices lui sert à avancer. La première partie de son mouvement est horizontale, les phases suivantes correspondent à une montée puis une descente comme représenté sur la figure 3. On rappelle que  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>.

#### 3.1 Phase d'accélération

1. Rappeler le lien entre travail et puissance.
2. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.
3. Combien de temps sera nécessaire pour que l'aérogliasseur atteigne une vitesse de  $v_A = 20$  m/s? Un résultat analytique en fonction des données du problème puis une application numérique sont attendus.

Le pilote coupe le moteur au début de la bosse en A (les hélices seront à l'arrêt à partir de ce point). La vitesse de l'aérogliasseur au début de la bosse en A est de  $v_A$ . Dans cette partie on étudie le mouvement de l'aérogliasseur sur la piste composée d'une portion rectiligne AB et inclinée d'un angle  $\alpha = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale, et d'une portion circulaire BC, de rayon  $R = 2$  m et d'angle  $\widehat{BOC} = \pi/2 + \alpha$  (cf figure 3). L'orientation positive des angles sera prise dans le sens horaire.

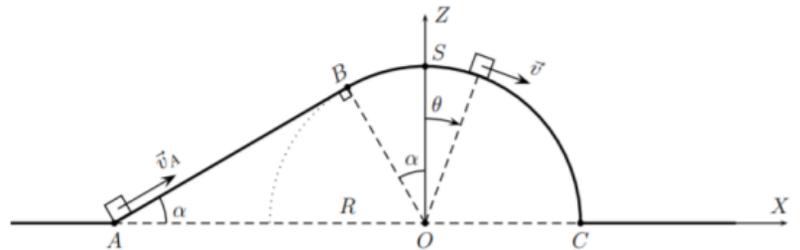


FIGURE 1 – Photo du pilote et de son aérogliasseur à gauche et schématisation de la piste parcourue par l'aérogliasseur à droite.

#### 3.2 Portion rectiligne AB

4. Énoncer le théorème de l'énergie mécanique.
5. En déduire l'expression littérale de la vitesse  $v_B$  au point B en supposant que ce point est bien atteint.
6. Afin que B soit effectivement atteint par l'aérogliasseur, il est nécessaire que  $v_A > v_{A,l}$ . Déterminer l'expression littérale puis numérique de  $v_A$

Pour les questions suivantes, on suppose la condition précédente vérifiée.

#### 3.3 Portion circulaire BC

7. Énoncer le principe fondamental de la dynamique.
8. En déduire l'expression en fonction de  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  et des constantes  $m$ ,  $g$  et  $R$  de la réaction normale  $\vec{R}_N$  du support lors de la phase du mouvement sur l'arc BC.
9. Déterminer la relation liant  $v$ ,  $\theta$  et  $v_B$ . On pourra utiliser une méthode énergétique.
10. En déduire  $\vec{R}_N$  en fonction des constantes,  $\theta$  et  $v_A$ .
11. À quelle condition sur  $v_A$  (expression littérale puis numérique) n'y aura-t-il pas de décollage de M avant le sommet S?
12. La condition précédente étant vérifiée, déterminer l'expression  $\theta_D$  de  $\theta$  pour laquelle l'aérogliasseur quitte la piste.
13. Déterminer l'expression de la vitesse pour  $\theta = \theta_D$ .

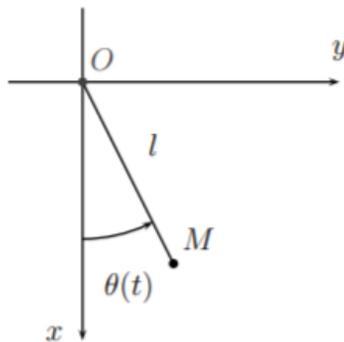
#### 3.4 Atterrissage

On étudie maintenant le mouvement entre le moment où l'aérogliasseur a décollé et celui où il va toucher le sol. On se place dans le repère cartésien OXZ.

14. Écrire les conditions initiales en fonction de  $R$ ,  $\theta_D$  et  $v_D$ .
15. Déterminer l'abscisse de la position où l'aérogliasseur va entrer en collision avec le sol.

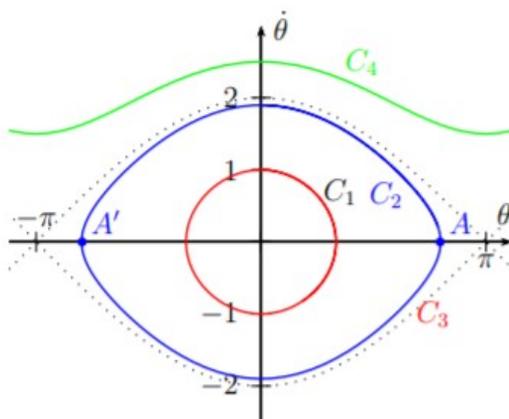
## 4 Un pendule qui tourne rond

On considère une bille (objet ponctuel)  $M$  de masse  $m$  accroché à un point fixe  $O$  par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur  $l$  et de masse négligeable. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g} = g \cdot \vec{e}_x$  (avec  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  et  $\vec{e}_x$  un vecteur unitaire de l'axe  $Ox$ ). On considère que le référentiel terrestre est galiléen et on ne considère pas les mouvements en dehors du plan  $Oxy$ .



On repère  $M$  par l'angle orienté  $\theta(t)$  entre la verticale et le fil :  $\theta(t) = (\vec{e}_x, \vec{e}_r)$  avec  $\vec{e}_r$  colinéaire à  $\overrightarrow{OM}$ . On lâche la masse d'un angle  $\theta_0$  sans vitesse initiale. Dans cette partie, on néglige les frottements.

1. Définir une base adaptée au problème (figure obligatoire) et donner la position  $\overrightarrow{OM}$ .
2. Déterminer l'expression de l'accélération de  $M$  dans la base choisie.
3. (a) Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $\theta(t)$ .  
 (b) En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0$  dont on donnera l'expression en fonction de  $l$  et  $g$ .  
 (c) En déduire  $\theta(t)$ .
4. Étude la tension du fil  $T$  :  
 (a) Déterminer l'expression de  $T$  en fonction de  $\theta, \dot{\theta}, m, g, l$  puis en fonction de  $\theta, \theta_0, m$  et  $g$  seulement.  
 (b) Pour quel angle le fil risque-t-il le plus de casser?



5. À l'instant  $t = 0$ , le point matériel est lancé de  $M_0$  ( $\theta_0 = 0$ ) avec une vitesse angulaire initiale  $\dot{\theta}_0$ . On suppose que le fil reste tendu pour tout  $t$ . On pose  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Le portrait de phase du pendule simple pour diverses valeurs de  $\theta_0$  est représenté ci-après.
  - (a) Démontrer que la bille du pendule est un système conservatif.
  - (b) Donner l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  du pendule simple en fonction de  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  en prenant une énergie potentielle de pesanteur  $E_P(\theta)$  nulle au point  $M_0$ . Donner aussi l'expression de  $E_m$  en fonction de  $\dot{\theta}_0$  en justifiant vos réponses.
  - (c) Tracer l'allure de  $E_P(\theta)$ . Décrire les mouvements possibles du pendule à partir de  $M_0$  suivant les valeurs de  $\dot{\theta}_0$  en utilisant la courbe de  $E_P(\theta)$ . Pour quelles valeurs de  $\dot{\theta}_0$  a-t-on un mouvement borné?
  - (d) Préciser le type de mouvement du pendule correspondant aux trajectoires de phase  $C_1, C_2$  et  $C_4$ . Que peut-on dire sur la valeur de  $\dot{\theta}_0$  dans chacun des cas?

# Correction du DS n°5

## 1 – Question de cours

## 2 – Etude d'une particule chargée

Pour toutes les premières questions il est important de prendre  $\vec{v}(t)$  dans le calcul de la force et non  $\vec{v}_0$ , sinon vous obtenez une relation qui n'est vraie qu'à  $t = 0$  et cela ne permet pas de conclure sur les primitives qui seraient constantes.

1. (a) Appliquons le théorème de la puissance cinétique à la particule dans  $\mathcal{R}$  galiléen (hypothèses vérifiées : référentiel galiléen et point; bilan des forces : uniquement la force de Lorentz) :

$\frac{dE_c}{dt} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ . L'énergie cinétique est donc constante. Comme la masse est supposée constante, on peut en déduire que la vitesse est constante.

- (b) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la particule dans  $\mathcal{R}$  galiléen :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \iff m \begin{vmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{vmatrix}$$

Soit en projection sur  $Oz$  :  $m\ddot{z} = 0$ . Soit  $\dot{z} = cste = 0$  car  $v_{0,z} = 0$  puis  $z = cste = 0$  car  $z_0 = 0$ . La trajectoire est donc plane.

- (c) Le mouvement est circulaire et uniforme (les deux arguments sont nécessaires, circulaire ne suffit pas). On peut donc écrire  $\vec{OM} = R\vec{e}_r$ ,  $\vec{v} = v_0\vec{e}_\theta$  et  $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r$ . D'où :

$$-m\frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r = q\vec{v} \wedge B\vec{e}_z \Rightarrow \|m\vec{a}\| = \|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| \Rightarrow m\frac{v_0^2}{R} = qvB$$

On a  $\|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| = qvB$  car  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$  sont orthogonaux (et  $q > 0$ ). On obtient le rayon :

$$\boxed{R = \frac{mv_0}{qB}}$$

2. (a) Les ions doivent être accélérés entre  $P_1$  et  $P_2$ . Ils sont soumis à la seule force électrique entre  $P_1$  et  $P_2$ . Les particules ont tendance à descendre les énergies potentielles (pensez à une bille dans un jouet), puisque  $E_p = qV$  et que  $q > 0$ , les particules de charge positive ont tendance à descendre les potentiels électriques (cohérent avec "les charges positives vont du + vers le -"). Puisque l'on va de  $P_1$  vers  $P_2$ , c'est que  $V(P_2) < V(P_1)$ , d'où  $W = V_{P_1} - V_{P_2} < 0$ .

- (b) Si la particule de  $F_1$  avec une vitesse nulle, elle arrive en  $F_2$  avec la vitesse  $v_{U8}$  telle que, d'après le théorème de l'énergie mécanique,  $E_{m,2} - E_{m,1} = W_{nc} = 0$  car seule la force électrostatique s'applique et elle est conservative. D'où  $E_{m,2} = E_{m,1} \Leftrightarrow E_{c,2} + qV(P_2) =$

$$E_{c,1} + qV(P_1) \simeq qV(P_1) \text{ d'où } \frac{1}{2}m_{U8}v_{U8}^2 = q(V_{P_1} - V_{P_2}) = -qW \Rightarrow \boxed{v_{U8} = \sqrt{\frac{-2eW}{m_{U8}}}}$$

- (c) Les deux isotopes partent du même point, la distance entre les collecteurs  $d$  est donc égale à la différence entre les deux diamètres des trajectoires :

$$d = D_{U8} - D_{U5} = 2(R_{U8} - R_{U5})$$

**Attention au facteur 2! Faites un schéma et représentez les rayons.**

En utilisant le lien entre la tension  $W$  et la valeur de vitesse en  $F_2$ , on obtient :

$$R_{U8} = \frac{mv_{U8}}{eB} = \sqrt{\frac{-2Wm_{U8}}{eB^2}} \quad \text{d'où}$$

$$d = 2(R_{U8} - R_{U5}) = 2\sqrt{\frac{-2mW}{qB^2}}(\sqrt{m_{U8}} - \sqrt{m_{U5}}) \quad \text{d'où} \quad W = -\frac{qd^2B^2}{8(\sqrt{m_{U8}} - \sqrt{m_{U5}})^2}$$

$$\text{A.N. : } W = -\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times (0,02)^2 \times 0,1^2}{8 \times 1,66 \cdot 10^{-27} (\sqrt{238} - \sqrt{235})^2} \quad \boxed{W = -5,1 \text{ kV}}$$

## B. Le cyclotron

1. La trajectoire circulaire de longueur  $L = \pi R$  (un demi-tour) est parcourue à la vitesse constante  $v = \frac{eBR}{m_P}$  (calculée ci-dessus) en un temps :

$$T_{1/2} = \frac{L}{v} = \frac{\pi R}{v} \quad \boxed{T_{1/2} = \frac{\pi m_P}{qB}}$$

Ce temps est indépendant du rayon. On peut donc en déduire que le temps pour effectuer un demi-tour est toujours le même.

2. On utilise une tension  $u(t)$  alternative sinusoïdale pour que le proton soit accéléré de manière optimale. En effet, il faut à chaque demi-tour changer le sens dans lequel on accélère la particule, d'où le fait de changer la tension de signe. De plus, on peut prendre un signal périodique car  $T_{1/2}$  est une constante (indépendante de la vitesse ou du rayon).

Enfin, un signal sinusoïdal suffit (en contraste avec un signal créneau, plus dur à réaliser à ces fréquences) car il suffit que  $u(t)$  soit maximum au moment où passe le proton, ce qui est assez bref.

3. On a ainsi

$$\frac{T}{2} = T_{1/2} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2T_{1/2}} = \frac{eB}{2\pi m_P}$$

$$\text{A.N. } f = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,1}{2\pi \times 1,67 \cdot 10^{-27}} \quad \boxed{f = 1,5 \text{ MHz}}$$

4. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est  $R_S$ . Or on avait  $v_S = \frac{eR_S B}{m_P}$

$$\text{d'où} \quad \boxed{E_{CS} = \frac{1}{2} m_P v_S^2 = \frac{e^2 R_S^2 B^2}{2m_P}}$$

$$\text{A.N. : } E_{CS} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,5 \times 0,1)^2}{2 \times 1,67 \cdot 10^{-27}} \quad \boxed{E_{CS} = 1,91 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0,12 \text{ MeV}}$$

5. Notons  $2N$  le nombre de demi-tours effectués (et donc le nombre d'accéléérations subies). À chaque accélération, le proton gagne :  $\Delta E_C = qU_m$  d'où  $\Delta E_{C,2N} = 2NqU_m = E_{CS}$  or

$$E_{CS} = \frac{e^2 R_S^2 B^2}{2m_P}$$

$$\boxed{N = \frac{eB^2 R_S^2}{4m_P U_m}}$$

A.N. :  $N = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,1^2 \times 0,5^2}{4 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times 10^5} = 0,6$  tours. Puisque l'on ne peut faire qu'un nombre entier ou demi-entier de tour et qu'au bout d'un demi-tour la particule n'est pas encore sortie, alors on fait  $\boxed{1 \text{ tour}}$  avant de sortir.

6. (a) Pour une trajectoire circulaire uniforme  $a = \frac{v^2}{R}$  d'où

$$P_r = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \left(\frac{v^2}{R}\right)^2 = \alpha v^4 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c R^2}$$

(b) L'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon est

$$E = P_r T_{1/2} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c R^2} \left(\frac{eBR_S}{m_P}\right)^4 \frac{\pi m_P}{eB} = \frac{\mu_0 e^5 B^3 R_S^2}{6cm_P^3}$$

A.N. : Calculons  $E$  en eV :  $E = \frac{4\pi 10^{-7} (1,6 \cdot 10^{-19})^4 \times 0,1^3 \times 0,5^2}{6 \times 3 \cdot 10^8 \times (1,67 \cdot 10^{-27})^3} = 3,9 \cdot 10^{-33} \text{ J} = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ eV}$ .

(c) Cette énergie rayonnée est négligeable devant l'énergie cinétique de la particule et il est donc raisonnable d'estimer que la perte par rayonnement est nulle, c'est à dire que l'énergie de la particule est constante à l'intérieur d'un "dee".

### 3 - Un pilote d'aéroglesseur qui aime les bosses

#### A. Lancement

1. La puissance est liée au travail élémentaire  $\delta W$  par la relation :  $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt}$  où  $dt$  est le temps pendant lequel le travail  $\delta W$  s'est exercé.

On peut ré-écrire cette relation sous la forme  $W_{A \rightarrow B} = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(t) dt$ .

2. Théorème de l'énergie cinétique : en référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail, pendant la même durée, de la résultante des forces appliquées à ce point matériel :  $\Delta E_c(M) = E_{c2} - E_{c1} = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F})$

Remarque : N'oubliez pas "en référentiel galiléen" ni "point matériel"

3 En utilisant le théorème précédent (ref galiléen | aeroglesseur + pilote assimilable à un point matériel) on obtient :

$E_{c1} = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 - 0 = \int_0^{t_A} \mathcal{P}_{fus}(t) dt = \mathcal{P}_{fus} t_A$  car  $\mathcal{P}_{fus}$  est constante. On en déduit  $\bar{E}_{c2} -$

$$t_A = \frac{mv_A^2}{2\mathcal{P}_{fus}} = 20 \text{ s}$$

#### B. Glisse

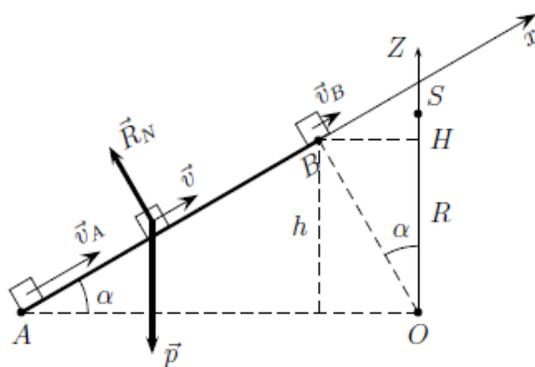
1. Portion rectiligne AB.

(a) Théorème de l'énergie cinétique : en référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail, pendant la même durée, des forces non conservatives appliquées à ce point matériel :

$$\Delta E_m(M) = E_{m2} - E_{m1} = W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}_{nc})$$

Remarque : N'oubliez pas "en référentiel galiléen" ni "point matériel"

(b) Appliquons le théorème précédent au système { point M } entre les points A et B.



Système : { point M }

Référentiel d'étude : le référentiel terrestre, galiléen (avec une bonne approximation pour ce type de mouvement)

Bilan des forces :

- poids  $\vec{p} = m\vec{g}$  (travaille, conservative)
- réaction du support  $\vec{R} = \vec{R}_N$  car il n'y a pas de frottement.

Remarque : Tracez la figure (ou la partie utile de celle-ci) et placez-y les forces et les données ( $R, \alpha \dots$ )

Seul le poids travaille entre  $A$  et  $B$  car  $\vec{R}_N$  est perpendiculaire au mouvement. L'énergie potentielle de pesanteur est  $E_p = +mgZ$  car l'axe est orienté vers le haut.

Remarque : Justifiez rapidement  $W(\vec{R}_N) = 0$

On a ainsi pour le point  $M$ ,

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{R}_N) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + mgZ_B - \frac{1}{2}mv_A^2 - mgZ_A = 0$$

avec  $Z_B = R \cos \alpha$  et  $Z_A = 0 \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 - 2gR \cos \alpha$  et  $v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gR \cos \alpha}$  si le terme sous la racine est positif.

Remarque : on obtient bien  $v_B < v_A$  comme le suggère l'intuition.

(c) Dans le cas limite où  $v_A = v_{A,l}$  le palet arrive en  $B$  avec une vitesse quasiment nulle.

$$\text{On en déduit } v_{A,l}^2 - 2gR \cos \alpha = 0 \Rightarrow v_{A,l} = \sqrt{2gR \cos \alpha} \simeq 5,8 \text{ m.s}^{-1}$$

Autre manière de voir les choses : il faut que  $v_B$  soit défini, or il y a une racine dans l'expression de  $v_B$  et il est donc nécessaire que le terme sous la racine soit positif ce qui donne le même résultat.

*Il s'agit d'une question où les justifications ont été souvent très critiquables : « il faut que  $v_B > 0$  » pourquoi pas  $v_B = 0$ ? « il faut que  $v_B \geq 0$  » c'est forcément le cas puisque  $v_B = \|\vec{v}_B\|$  et qu'une norme est toujours positive.*

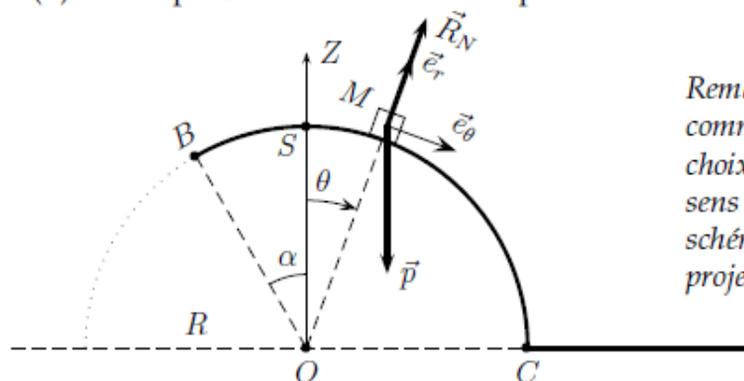
## 2. Portion circulaire $BC$ .

(a) Principe fondamental de la dynamique : en référentiel galiléen, la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la résultante des forces

$$\text{appliquées à ce point matériel : } \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m\vec{a}(M/\mathcal{R}_g) = \vec{F}$$

Remarque : Il s'agit ici du PFD, sur un point. Dans le cas d'un système, on utilise le théorème de la résultante cinétique. On aurait toujours besoin d'un référentiel galiléen, mais il faut maintenant rajouter les différences suivantes : le système doit être fermé, les forces sont uniquement les forces extérieures et l'accélération à prendre en compte est celle du centre de masse.

(b) Sur la portion circulaire la base polaire est mieux adaptée.



Remarque : Le vecteur  $\vec{e}_\theta$  "est orienté" par comme l'orientation positive des angles. Ici le choix a été fait d'orienter les angles dans le sens horaire de façon à ce que  $\theta > 0$  sur le schéma ci-contre, ce qui facilite grandement les projections (signes en particuliers).

Le palet  $M$  est à nouveau soumis à

- son poids  $\vec{p} = m\vec{g} = -mg \cos \theta \cdot \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta$  et à
- la réaction du support  $\vec{R} = R_N \cdot \vec{e}_r$

Remarque : Une figure avec les forces est obligatoire.

Par ailleurs, dans la base polaire  $\vec{OM} = R \cdot \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta$  et  $\vec{a} = R\ddot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \cdot \vec{e}_r$ .

Le principe fondamental s'écrit donc ici,

$$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{R}_N \Rightarrow m(R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r) = -mg \cos \theta \vec{e}_r + mg \sin \theta \vec{e}_\theta + R_N \vec{e}_r$$

soit après projection selon  $\vec{e}_r$ ,  $R_N = mg \cos \theta - mR\dot{\theta}^2$  et  $\vec{R}_N = m[g \cos \theta - R\dot{\theta}^2]\vec{e}_r$  (Remarque, c'était  $\vec{R}_N$  qui était demandé et non  $R_N$ ).

- (c) Pour déterminer l'expression de  $v$  cherchée, on peut utiliser le théorème de l'énergie mécanique :  $\Delta E_m = W_{nc}$  où  $E_m = E_c + E_p$  est l'énergie mécanique de  $M$  et  $W_{nc}$  le travail des forces non conservatives.

Remarque : il est souvent plus pertinent d'utiliser le théorème de l'énergie mécanique que celui de l'énergie cinétique lorsque l'on connaît les énergies potentielles, ce qui est le cas ici. Cela évite le calcul du travail et facilite généralement les choses.

$R_N$  est la seule force non conservative mais elle ne travaille pas d'où  $W_{nc} = 0$ .

Quant à  $\vec{p}$ , elle dérive de l'énergie potentielle  $E_p = mgZ + Cte = mgR \cos \theta + Cte$  ici.

Remarque : On peut poser  $Cte = 0$  si on veut prendre  $E_p = 0$  pour  $Z = 0$

Par application du théorème entre  $B : (\theta = -\alpha; v = v_B)$  et  $M : (\theta; v)$ , on peut écrire :

$$E_m(B) - E_m(A) = W_{nc} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR \cos(-\alpha) + Cte - \frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos(\theta) - Cte = 0$$

$\Rightarrow v^2 = v_B^2 + 2gR(\cos \alpha - \cos \theta) \Rightarrow v = \sqrt{v_B^2 + 2gR(\cos \alpha - \cos \theta)}$  si le terme sous la racine est défini, c'est à dire si le palet peut atteindre la valeur de  $\theta$  considérée.

*Attention, « il n'y a pas de frottement donc l'énergie mécanique se conserve » est une phrase a priori fautive. En effet, il peut y avoir d'autres forces qui font varier l'énergie mécanique (pensez à un avion où à une voiture, leur énergie mécanique augmente grâce aux moteurs). De même, il peut arriver (et cela dépend du référentiel) que les frottements soient moteurs (pensez à une feuille qui s'envole à cause du vent).*

- (d) En reportant la relation  $v^2 = R^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R^2}$  dans l'expression de  $\vec{R}_N$ , on obtient

$$R_N = m \left[ g \cos \theta - \frac{v^2}{R} \right] = m \left[ g \cos \theta - \frac{v_B^2}{R} - 2g \cos \alpha + 2g \cos \theta \right] = m \left[ 3g \cos \theta - \frac{v_B^2}{R} - 2g \cos \alpha \right]$$

et comme  $v_B^2 = v_A^2 - 2mgR \cos \alpha$ , il vient  $\vec{R}_N = m \left[ 3g \cos \theta - \frac{v_A^2}{R} \right] \cdot \vec{e}_r$

On aurait pu en fait calculer directement  $v$  en fonction de  $v_A$  en appliquant directement le théorème de l'énergie mécanique entre  $A$  et  $M$ . Pensez à préciser les points entre lesquels vous utilisez le théorème.

- (e) Le décollage se produira lorsque  $R_N$  s'annule.

D'après le résultat de la question 2.(c),  $R_N$  diminue lorsque  $\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R^2}$  augmente or sur la portion circulaire  $BS$ ,  $v$  est maximale en  $B$  puis diminue.

Ainsi, si l'aéroglesseur décolle entre  $B$  et  $S$ , ce sera donc en  $B$ , c'est à dire en  $\theta = -\alpha$ .

Remarque : une analyse physique avant le calcul est nécessaire. Ou alors il faut faire des maths proprement.

On cherche donc la valeur limite  $v'_{A,l}$  pour laquelle  $R_N$  s'annule en  $\theta = -\alpha$

$$\Rightarrow 3g \cos(-\alpha) - \frac{v'_{A,l}{}^2}{R} = 0 \Rightarrow v'_{A,l} = \sqrt{3Rg \cos \alpha}$$

La condition sur  $v_A$  est donc  $v_A < \sqrt{3Rg \cos \alpha} \simeq 7,1 \text{ m.s}^{-1}$

Autre manière de voir la même chose : on veut  $\forall \theta \in [-\alpha; 0]$  ;  $3g \cos \theta - \frac{v_A^2}{R} > 0 \Rightarrow \forall \theta \in [-\alpha; 0]; \sqrt{3Rg \cos \theta} > v_A$

or sur  $[-\alpha; 0]$  la grandeur  $\sqrt{3Rg \cos \theta}$  varie entre  $\sqrt{3Rg \cos \alpha}$  et  $\sqrt{3Rg}$  donc pour que  $v_A$  vérifie l'inégalité  $\forall \theta \in [-\alpha; 0]$ , il faut et il suffit que  $\sqrt{3Rg \cos \alpha} = v'_{A,l} > v_A$ . (même résultat)

(f) Le palet quittera la piste en  $\theta_d$  tel que  $R_N = 0 \Rightarrow 3g \cos \theta_d - \frac{v_d^2}{R} = 0 \Rightarrow \theta_d = \arccos \left[ \frac{v_d^2}{3gR} \right]$

Remarque : Grâce à la question précédente, on sait que l'argument d'arc-cosinus est bien inférieur à 1, sinon on aurait déjà décollé en S.

(g) Puisque  $v = \sqrt{v_A^2 - 2gR \cos \theta}$  (TEM depuis le point A ou question 1b et 2c) et puisque  $3g \cos \theta_d = \frac{v_d^2}{R} = 0$  (question 2f) on en déduit que  $2gR \cos \theta_d = \frac{2}{3}v_d^2$  et donc que  $v_d = \frac{v_A}{\sqrt{3}}$ .

### C. « Atterrissage »

1. Les conditions initiales portent sur  $X, Z, \dot{X}, \dot{Z}$ . On pose  $t = 0$  au moment du décollage. À cet instant on a d'après la figure précédente ( $\vec{v}_d$  colinéaire à  $\vec{e}_\theta$ )  $X = R \sin \theta_d$ ;  $Z = R \cos \theta_d$ ;  $\dot{X} = v_d \cos \theta_d$ ;  $\dot{Z} = -v_d \sin \theta_d$ .

2. On a alors une chute libre classique, le PFD appliqué à l'aérog. donne  $\ddot{X} = 0$  et  $\ddot{Z} = -g$ , d'où  $X(t) = R \sin \theta_d + v_d \cos \theta_d \times t$  et  $Z(t) = R \cos \theta_d - v_d \sin \theta_d \times t - \frac{1}{2}gt^2$ .

La collision avec le sol a lieu lorsque  $Z(t_c) = 0 = R \cos \theta_d - v_d \sin \theta_d \times t_c - \frac{1}{2}gt_c^2$ . Pour trouver  $t_c$ , on cherche le discriminant :  $\Delta = v_d^2 \sin^2 \theta_d + 4R \frac{g}{2} \cos \theta_d > 0$ .

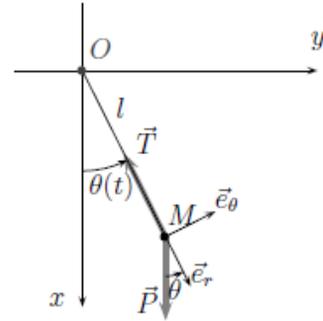
On a alors deux solutions, dont une seule est positive :  $t_d = \frac{v_d \sin \theta_d}{-g} - \frac{\sqrt{\Delta}}{-g} = \frac{\sqrt{\Delta} - v_d \sin \theta_d}{g}$ .

La position de collision avec le sol est alors  $X(t_d) = R \sin \theta_d + v_d \cos \theta_d \times \frac{\sqrt{v_d^2 \sin^2 \theta_d + 2Rg \cos \theta_d} - v_d \sin \theta_d}{g}$ .

Remarque : il est en fait possible d'exprimer cela un peu plus simplement en fonction de  $v_A, R$  et  $g$  uniquement, mais ce n'était pas attendu de la question puisque vous pouviez le faire en fonction de  $v_d$  et  $\theta_d$  même sans avoir résolu les questions précédentes.

## IV. LE PENDULE SIMPLE

Il est indispensable de faire un schéma pour définir la base polaire. De plus, ce schéma vous aidera pour les projections des forces. Il faut donc le réaliser avec soin. Évitez les angles de  $45^\circ$  pour ne pas confondre  $\theta$  et  $\frac{\pi}{2} - \theta$ .



1. La base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est adaptée à ce problème (voir schéma ci-contre). On a :  $\overrightarrow{OM} = l\vec{e}_r$ .

2. Système : bille  $M$  de masse  $m$ . Référentiel :  $\mathcal{R}_T$ , référentiel terrestre local galiléen.

On a  $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$  et donc  $\vec{a} = -l\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

3. (a) Bilan des forces :

— le poids  $\vec{P} = m\vec{g} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$

— la tension du fil  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$

Appliquons la deuxième loi de Newton à la bille dans  $\mathcal{R}_T$  :  $m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$ . Soit en projection selon  $\vec{e}_\theta$  :  $m\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + 0$  d'où  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ . (Remarque, une méthode énergétique fonctionne aussi).

(b) Pour des angles faibles, c'est-à-dire  $\theta(t) \ll 1$ , on fait l'approximation :  $\sin \theta \simeq \theta$  d'où

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ , soit  $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$  avec  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

(c) Le mouvement est celui d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0$ , la solution est de la forme  $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . Or  $\theta(t=0) = \theta_0 = A$  et  $\dot{\theta}(t=0) = 0 = B\omega_0$ . D'où

$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$

4. Étude la tension du fil  $T$  :

(a) Projetons la deuxième loi de Newton selon  $\vec{e}_r$  :  $-ml\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T$  soit  $T = -ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta$ .

Pour éliminer  $\dot{\theta}$ , multiplions l'équation du mouvement par  $\dot{\theta}$  (méthode du facteur intégrant) :  $\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\dot{\theta} \sin \theta = 0$

$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \theta \right) = 0$  soit  $\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{g}{l} \cos \theta = cste = -\frac{g}{l} \cos \theta_0$  en utilisant les conditions initiales.

Soit  $\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)$

En remplaçant dans l'expression de  $T$ , on obtient :  $T(\theta) = 3mg \cos \theta - 2mg \cos \theta_0$

(b) Le fil risque le plus de casser lorsque la tension est maximale soit  $\theta = 0$  puisque seul  $\cos \theta$  varie et qu'il est maximum en 0.

5. Portrait de phase :

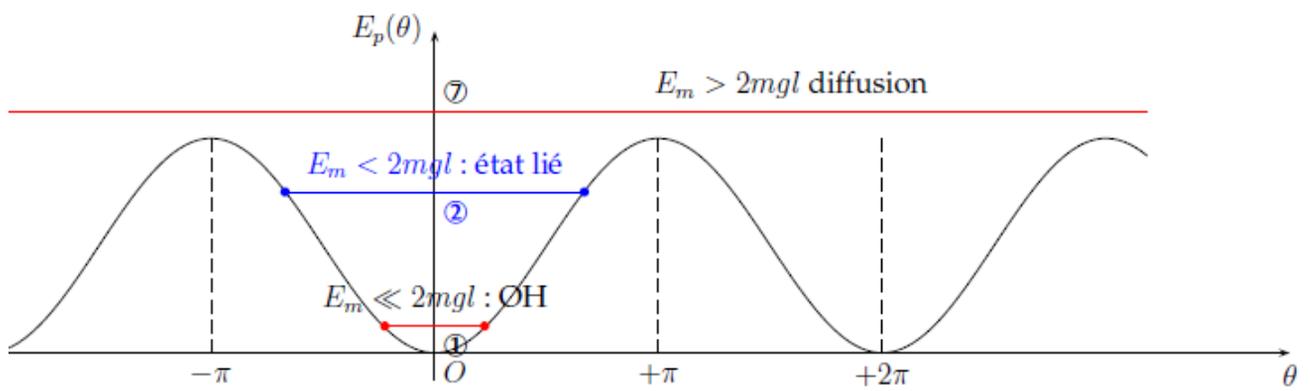
(a) La bille est soumise à son poids qui est une force conservative et à la tension du fil, orthogonale à la trajectoire à tout instant et donc qui ne travaille pas. Le système est donc conservatif.

(b)  $E_m(\theta) = E_p + E_c$ .  $E_p = -mgx + cte$  d'après le cours (on a  $x$  vertical descendant). D'où  $E_p = -mgl \cos \theta + cte$ . Or  $E_p(\theta = 0) = 0$  d'où  $0 = -mgl + cte$  et finalement  $E_p = mgl(1 - \cos \theta)$ .  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ , or  $\vec{v} = l\dot{\theta}$  d'où  $E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ .

Finalement  $E_m(\theta) = mgl(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ . Or  $E_m(\theta) = cte = E_m(\theta = \theta_0)$  avec

$E_p(\theta_0) = 0$  d'où  $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2$

(c)  $E_p = mgl(1 - \cos \theta)$



Différents cas en fonction de  $E_m$  :

- Cas 1 :  $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2 < E_{p,MAX}=2mgl$ , c'est-à-dire  $\|\dot{\theta}_0\| < 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ . Dans ce cas, le mouvement est borné (état lié), oscillations.
- Cas 2 :  $E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_0^2 > E_{p,MAX}=2mgl$ , c'est-à-dire  $\|\dot{\theta}_0\| > 2\sqrt{\frac{g}{l}}$ . Dans ce cas, le mouvement est non borné, rotation du pendule.

(d)  $C_1$  : mouvement périodique sinusoïdal (oscillateur harmonique).  $C_2$  : mouvement périodique non harmonique. Pour ces deux trajectoires, on est dans le cadre du cas 1 ci-dessus.  $C_3$ , il s'agit ici du cas 2 et on a un mouvement de rotation.