RÉVISIONS SUP-SPÉ

Objectif
Le but de cette liste est de vous fournir un appui pour vos révisions d'été. Vous serez évalués en colle pendant la première semaine de cours après la rentrée sur les points listés. Il y aura également très rapidement un DS utilisant les notions de base répertoriées ici. (Cela ne doit pas vous empêcher de reprendre les chapitres de sup qui vous ont posé problème).
Pour vous aider dans votre travail, nous avons établi une liste de notions indispensables, et des séries d'exercices d'entraînement. C'est un travail d'approfondissement que nous vous demandons, sur des notions élémentaires que vous connaissez déjà mais sur lesquelles vous devez avoir une bonne maîtrise en début de spé.

Méthodologie
➢ Suivez le planning fourni, en vous y prenant suffisamment à l'avance. Les révisions sont organisées pour 12 jours. Comptez 2 à 3 heures de travail par jour (en mathématiques).
➢ **Première semaine** : Commencez par revoir le cours (cours de sup, sites proposés ci-dessous, livre de cours,...) sur la notion. Faites une fiche (pas plus d'une page) avec des mots-clés, quelques défintions et théorèmes en organisant les notions. *Exemple*

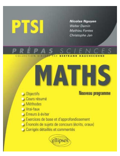
Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4	Jour 5	Jour 6
Espaces vectoriels, sous-espaces, familles	Fonctions usuelles, théorèmes sur la continuité, la dérivabilité	Espaces vectoriels, bases et supplémentaires	Développements limités	Applications linéaires	Etudes de suites et fonctions

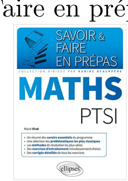
➢ **Deuxième semaine** : Cherchez les exercices de votre choix dans la page : si vous bloquez, repartez vers le cours, vers des exercices corrigés (notes de td de sup, site internet ou livre). Reprenez les exercices. Vous n'êtes pas obligé de faire tous les exercices proposés mais votre objectif doit être une bonne maîtrise des notions à la rentrée.
➢ Les corrigés des exercices sont disponibles, mais vous ne devez les consulter qu'après avoir bien cherché seul : lire un corrigé n'apporte pas autant qu'une recherche personnelle.

Jour 7	Jour 8	Jour 9	Jour 10	Jour 11	Jour 12
Espaces vectoriels, sous-espaces, familles	Développements limités	Espaces vectoriels, bases et supplémentaires	Etudes de suites et fonctions	Applications linéaires	Calcul d'intégrales

Liens et Livres
Si vous avez besoin de reprendre à votre rythme certains chapitres, nous vous conseillons deux sites :
➢ Le site Exo7 : http://exo7.emath.fr/un.html, très complet, vous y trouverez des cours et des vidéos, des exercices et des corrigés en vidéos.
➢ Les vidéos suivantes sur les espaces vectoriels :
https://www.youtube.com/watch?v=hJnbt2Cu1Es et https://www.youtube.com/watch?v=VeZvxjWa2XY

➢ Cela ne nous semble pas nécessaire mais si vous souhaitez investir dans un livre, nous vous conseillons :
➞ Un livre de cours, PTSI - Maths, collection Prépas Sciences, Ellipses
➞ Un livre d'exercices, Savoirs et Faire en prépas, Maths PTSI, Ellipses





➢ Pour vous distraire, tout en restant dans le domaine mathématique ou scientifique, le site Image des maths, http://images.math.cnrs.fr/ est une bonne option, à explorer.

Conclusion
Ne vous contentez pas d'un travail superficiel, et organisez-vous pour aborder toute la liste. Vous pouvez me contacter par mail pendant l'été si vous avez des questions. samuel.biton@ac-orleans-tours.fr

Liste des notions à travailler

Algèbre linéaire

Espaces vectoriels - Matrices

1. *Connaissance du cours*
   - ➢ Connaître les espaces vectoriels de référence — Jour 1 - exo 1
   - ➢ Savoir montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel — Jour 1 - exo 2 et Jour 7 - exo 2
   - ➢ Savoir montrer qu'une famille est libre, est une base — Jour 1 - exo 3 et Jour 7 - exo 1, 3, 4, 5, 6
   - ➢ Savoir citer le théorème de la base incomplète et l'utiliser — Jour 7 - exo 4 et Jour 3 - exo 2, 3, 4
2. *Savoir-faire techniques*
   - ➢ Savoir trouver une base d'un espace vectoriel (ou d'un sous-espace vectoriel) — Jour 3 et Jour 9
   - ➢ Savoir montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires — Jour 3 - exo 4 et Jour 9 - exo 1, 4, 5, 6

Applications linéaires - Matrices

- ➢ Savoir montrer qu'une application est linéaire — Jour 5 - exo 1, 2 et Jour 11
- ➢ Savoir définir un projecteur ou une symétrie — Jour 5 - exo 4
- ➢ Savoir déterminer une matrice d'application linéaire — Jour 11 - exo 2,4
- ➢ Savoir déterminer un noyau, une image — Jour 5 - exo 2, 3 et Jour 11 - exo 1, 2, 4, 5

Analyse

Développements limités

1. *Connaissance du cours*
   - ➢ Connaître les équivalents de référence — Jour 4 - exo 3
   - ➢ Connaître les DL usuels à l'ordre 2 ou 3 — Jour 4 - exo 1
2. *Savoir-faire techniques*
   - ➢ Savoir anticiper les calculs pour obtenir un DL à un ordre donné — Jour 4 - exo 2 et Jour 8 - exo 1, 2, 3
   - ➢ Savoir calculer un DL en 0 ou en $+\infty$ pour étudier une fonction — Jour 6 - exo 4, 5 et Jour 10
   - ➢ Savoir utiliser un DL pour obtenir un équivalent ou un développement asymptotique d'une suite — Jour 6 - exo 2, 3
   - ➢ Savoir utiliser un DL pour étudier le graphe d'une fonction (tangente et position relative, asymptote et position relative) — Jour 10

Fonctions et suites

1. *Connaissance du cours*
   - ➢ Avoir une bonne connaissance des fonctions usuelles — Jour 2 - exo 1
   - ➢ Savoir citer une liste d'hypothèses et de conclusions pour les principaux théorèmes liés à la continuité et à la dérivabilité — Jour 2 - exo 2, 3 et Jour 10 - exo 4
   - ➢ Savoir citer une liste d'hypothèses et de conclusions pour les principaux théorèmes d'existence de limite de suites ou de fonctions — Jour 6 - exo 1 et Jour 10 - exo 5
2. *Savoir-faire techniques*
   - ➢ Savoir effectuer des calculs de dérivées — `http://exo7.emath.fr/cours/ch_derive.pdf`
   - ➢ Savoir effectuer des calculs de primitives (par IPP, par changement de variables) — Jour 12
   - ➢ Savoir rédiger l'utilisation les principaux théorèmes pour les suites et fonctions — Jour 10 - exo 4, 5

Jour 1 : Espaces vectoriels - Partie I

Consulter le site Exo7 :
http://exo7.emath.fr/cours/ch_ev.pdf et http://exo7.emath.fr/cours/ch_dimension.pdf

Retour à la liste Algèbre

Exercice 1 ♥♥ *Connaissance du cours* ♥♥

Vous devez bien connaître les espaces suivants : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Pour chacun de ces espaces, vous devez savoir

1. les définir,
2. citer deux éléments formant une famille libre, trois éléments formant une famille liée,
3. donner leur dimension si elle est finie,
4. citer une base canonique (standard) si il y en a une, expliquer pourquoi c'est une base,
5. proposer une ou deux autres bases (éventuellement dans le cas $n = 2$ et $n = 3$).

Exercice 2 ♥♥ *Connaissance du cours* ♥♥

Soit E un espace vectoriel, et F une partie de E.

1. Comment vérifie-t-on que F est un sous-espace vectoriel F de E ?
2. Soient u et v deux vecteurs de E, définir $\mathrm{Vect}(u,v)$.

Exercice 3 ✍ *Entraînement* ✍

Pour les ensembles suivants, dire s'ils sont des sous-espaces vectoriels de E. On justifiera la réponse.

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x - 2y = 1\}$.
2. Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in E \ / \ P(1) = 0 \text{ et } P'(0) = 0\}$.
3. Dans $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in E \ / \ x^2 = 0\}$.
4. Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on fixe $A \in E$ et on définit $F = \{M \in E \ / \ AM = 2MA\}$.

Exercice 4 ✍ *Entraînement* ✍

Pour les familles suivantes, dire si elles sont libres. On justifiera la réponse.

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, $(\ (1,-2),\ (2,3),\ (-1,1)\ )$
2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, $(\ (1,1,-2),\ (-1,2,1),\ (-1,-9,-6)\ )$
3. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\big(X-1, X^2+X, X^2+1\big)$
4. Dans $E = \mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R})$, (f_1,f_2) avec $f_1 \ : \ x \mapsto \cos x$ et $f_2 \ : \ x \mapsto \sin x$
5. Dans $E = \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$, (f_1,f_2,f_3) avec $f_1 \ : \ x \mapsto e^x$, $f_2 \ : \ x \mapsto e^{2x}$ et $f_3 \ : \ x \mapsto \ln x$.

Retour à la liste Algèbre
Retour au planning

Jour 2 : Fonctions et continuité

Consulter le site Exo7 :
http://exo7.emath.fr/cours/ch_fonctions.pdf et http://exo7.emath.fr/cours/ch_derive.pdf

Retour à la liste Analyse

Exercice 1 ♥♥ *Connaissance du cours* ♥♥

Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition, l'allure de son graphe (avec éventuellement les points remarquables, les tangentes particulières, les asymptotes), si elle est paire ou impaire, donner les limites usuelles.

1. Fonction logarithme
2. Fonction exponentielle
3. Fonction cosinus
4. Fonction sinus
5. Fonction tangente
6. Fonction cosinus hyperbolique
7. Fonction sinus hyperbolique
8. Fonction arccosinus
9. Fonction arcsinus

Exercice 2 ♥♥ *Connaissance du cours* ♥♥

Vous devez connaître les définitions suivantes pour une fonction f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$:

1. Limite en un point **2.** Continuité en un point **3.** Dérivabilité en un point

Exercice 3 ♥♥ *Connaissance du cours* ♥♥

Vous devez connaître et savoir citer intégralement les théorèmes suivants. *Faites une liste d'hypothèses et de conclusions sur le modèle du premier théorème.*

1. Le théorème des valeurs intermédiaires :

Hypothèses	*Conclusion*
Si I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ Si f une application **continue** sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ Si $(a, b) \in I^2$ et y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$	il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = y$.

2. le théorème de la bijection (avec nature des bornes de l'intervalle image)
3. le théorème des bornes atteintes
4. le théorème de Rolle
5. l'inégalité triangulaire du calcul intégral
6. l'égalité et l'inégalité des accroissements finis

Exercice 4 ✍ *Entraînement* ✍ *- Banque PT*

1. Étudier les variations de la fonction f, définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
3. **a.** Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$.
   b. Donner, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, l'expression de $(f^{-1})'(x)$ en fonction de x.
   c. Montrer que $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

   On posera, pour tout réel x de $[-1, 1]$: $f^{-1}(x) = \arcsin x$.

4. Donner, sur un graphe, dans un repère orthonormé direct, l'allure des courbes représentatives de f et f^{-1}.

Retour à la liste Analyse
Retour au planning

Jour 3 : Espaces vectoriels - Partie II

Consulter le site Exo7 :
http://exo7.emath.fr/cours/ch_ev.pdf et http://exo7.emath.fr/cours/ch_dimension.pdf

Retour à la liste Algèbre

Exercice 1 ♥♥ *Connaissance du cours* ♥♥

On se place dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E. F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Donner la définition de F et G sont supplémentaires dans E.

2. Donner une caractérisation de F et G sont supplémentaires dans E.

3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner des exemples d'espaces supplémentaires, des exemples de sous-espaces vectoriels qui ne sont pas supplémentaires. Illustrer vos exemples.

Exercice 2 ✍ *Entraînement* ✍

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$.

1. Trouver une base de $F = \{(x, y) \in E \ / \ 2x - 3y = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

2. Décrire $H = \text{Vect}((1, 2))$ (en donner une description comme celle de F).

Exercice 3 ✍ *Entraînement* ✍

On se place dans $E = \mathbb{R}^4$.

1. Trouver une base de $F = \{(x, y, z, t) \in E \ / \ x-y+2z-t = 0 \text{ et } x-z+t = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

2. Décrire $G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1))$ et déterminer un supplémentaire de G dans E.

3. Décrire $H = \text{Vect}((-1, 1, 2, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0))$.

Exercice 4 ✍ *Entraînement* ✍

On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Trouver une base de $F = \{P \in E \ / \ P(0) = P(1) = 0\}$.

2. Soit $G = \text{Vect}(X, X^2 + 1)$, montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

3. Déterminer un autre supplémentaire de G dans E.

Retour à la liste Algèbre

Retour au planning

Jour 4 : Développements limités

Consulter le site Exo7 : http://exo7.emath.fr/cours/ch_dl.pdf

Retour à la liste Analyse

Exercice 1 ♥ *Connaissance du cours* ♥

1. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de e^x.

2. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$.

3. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\mathrm{sh}x$.

4. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\sin x$.

5. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$.

6. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{1+x}$.

7. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1+x)^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$).

8. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\sqrt{1+x}$.

9. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

10. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\cos x$.

11. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\mathrm{ch}x$.

12. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\arctan x$.

Exercice 2 ✍ *Entraînement* ✍

Déterminer d'abord à quel ordre choisir les DL des fonctions usuelles, puis déterminer le DL ou l'équivalent demandé. Explicitez les calculs et les DLs utilisés.

1. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $e^x(x-x^2)$.

2. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$.

3. Équivalent en 0 de $\dfrac{x\tan x-(\cos x-1)}{\sin^2(x/2)}$.

Exercice 3 ✈ *Prenons de la hauteur* ✈

Faut-il faire un DL ou pas pour obtenir un équivalent simple ? Dans les cas suivants, vous devez trouver un équivalent de la fonction mais vous n'utiliserez les DL que si c'est nécessaire.

Exemples :

➢ Équivalent de $\dfrac{\ln x+x}{x^2+1}$ au voisinage de $+\infty$.

On trouve sans DL :

$\boxed{\dfrac{\ln x+x}{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}}$ car $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$ donc $\ln x + x \underset{+\infty}{\sim} x$ et $1 \underset{+\infty}{=} o(x^2)$ donc $x^2+1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$.

➢ Équivalent de $\sin x - x\cos x$ au voisinage de 0.

On a $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $x\cos x \underset{0}{\sim} x$. Comme on ne soustrait pas les équivalents et que l'ordre est le même, on passe par les DL pour avoir l'ordre suivant.

$\sin x \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $x\cos x \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$.

Donc $\sin x - x\cos x \underset{0}{=} \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, et on conclut $\boxed{\sin x - x\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}}$

À vous !

1. Équivalent en 0 puis en $+\infty$ de $\ln x + 3x - 1$, de $e^x - x + 3$, de $\dfrac{x^3-2x-1}{x^2+x+1}$.

2. Équivalent en 0 de $\dfrac{x+x^2}{\sqrt{x(2-x)}}$, de $\dfrac{e^x+x\ln x}{e^x-1}$, de $\dfrac{\ln x - e^x+1}{x^3+x^4}$, de $\dfrac{x+(\sin x)^2}{\cos x-1}$, de $\dfrac{e^x-\ln x}{x+\ln x}$, de $\dfrac{\ln(1+x)}{xe^x+x^2}$.

3. Équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{e^x-x\ln x}{e^x-1}$, de $\dfrac{\ln x(x-\ln x)}{x+x^2}$, de $\dfrac{x-\ln x}{e^{1/x}-1}$, de $\dfrac{\ln x+\sin x}{x^2+\cos x}$, de $\cos(1/x)-e^{1/x}$.

Retour à la liste Analyse
Retour au planning

Jour 5 : Applications linéaires

Consulter le site Exo7 :
http://exo7.emath.fr/cours/ch_ev.pdf et http://exo7.emath.fr/cours/ch_matlin.pdf

Retour à la liste Algèbre

Exercice 1 ♥ *Connaissance du cours* ♥

1. Soit E, F deux espaces vectoriels. Donner la définition d'application linéaire de E dans F.
2. Donner la définition du noyau d'une application linéaire f de E dans F.
3. Donner la définition de l'image d'une application linéaire f de E dans F.
4. Prouver que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $\ker f = \{0\}$.
5. On suppose que E est de dimension finie, prouver alors que $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijective si et seulement si $\ker f = \{0\}$.

Exercice 2 ✍ *Entraînement* ✍
Pour chacune des applications suivantes, prouver qu'elle est linéaire, déterminer son noyau et son image (on en donnera une base si possible).

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & 2x + z \end{array}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & 2P(X) - (X + 1)P'(X) \end{array}$
3. $f : \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{R}) & \to & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tM \end{array}$

Exercice 3 ✍ *Entraînement* ✍
On considère les éléments de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1, 2)$ et $e_2 = (2, 1)$.

1. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. On définit f, application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, par $f(e_1) = (1, 1, 0)$ et $f(e_2) = (0, 1, 1)$. Exprimer $f(u)$ pour un vecteur $u = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 4 ♥ *Connaissance du cours* ♥
On se place dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E.

1. Soient F et G deux supplémentaires dans E. Donner la définition de la projection vectorielle f sur F parallèlement à G. Illustrer cette définition par un dessin (dans $\mathbb{R}^2$ puis dans $\mathbb{R}^3$).
2. Soit p un projecteur de E (i.e. un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$). Montrer que $\mathrm{Im} p$ et $\ker p$ sont supplémentaires dans E.

Retour à la liste Algèbre
Retour au planning

Jour 6 : Etudes de suites et fonctions

Consulter le site Exo7 : http://exo7.emath.fr/cours/ch_dl.pdf

Retour à la liste Analyse

Exercice 1 ♥♥ *Connaissance du cours* ♥♥

Vous devez connaître et savoir citer intégralement les théorèmes suivants. *Faites une liste d'hypothèses et de conclusions.*

1. le théorème de la limite (ou convergence) monotone pour les suites

2. le théorème de la limite monotone pour les fonctions

3. les théorèmes donnant une limite par comparaison (encadrement, majoration, minoration, domination)

4. le théorème des suites adjacentes

Exercice 2 ♥♥ *Connaissance du cours* ♥♥

1. Donner la caractérisation de $u_n \sim v_n$ et de $u_n = o(v_n)$ pour deux suites ne s'annulant pas.

2. Montrer que $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$.

Exercice 3 ✍ *Entraînement* ✍

Donner un équivalent des suites définies par :

1. $u_n = \dfrac{\cos(n) - n}{\ln n + \sqrt{n}}$. $\quad v_n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$. $\quad w_n = \ln\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{n^2}} - \dfrac{1}{n^2}\right)$. $\quad a_n = \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^n$

$b_n = \sqrt{1-\cos(\dfrac{1}{n})}$.

2. Trouver un équivalent de $\ln(n \sin \dfrac{1}{n})$ et la limite de la suite définie par $w_n = (n\sin(\dfrac{1}{n}))^{n^2}$.

Exercice 4 ✍ *Entraînement Corrigé* ✍

On pose $f : x \mapsto x^2\ln(x+2) - x^2\ln x$. Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$ et étudier la position relative graphe/asymptote au voisinage de $+\infty$.

L'idée est d'effectuer un développement asymptotique en $+\infty$.

➢ On met en facteur les termes dominants (ici x dans $x+2$, ce qui amène à $\ln(x+2) = \ln(x(1+\frac{2}{x})) = \ln x + \ln(1+\dfrac{2}{x}))$:

$f(x) = x^2(\ln x + \ln(1+\dfrac{2}{x})) - x^2\ln x = x^2\ln(1+\dfrac{2}{x})$.

On utilise alors un DL en 0 de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 pour obtenir $f(x) = 2x - 2 + o(1)$ (*étapes à compléter*).

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (2x-2) = 0$, donc la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 2$ au voisinage de $+\infty$.

➢ Pour avoir la position relative courbe/asymptote, on cherche le signe de $f(x) - (2x-2)$ au voisinage de $+\infty$.
On pousse le DL à l'ordre suivant pour avoir un équivalent de $f(x) - (2x-2)$ en $+\infty$.

Deux fonctions équivalentes en a ont même signe au voisinage de a, ce n'est pas un résultat aussi précis qu'une étude de signe mais cela suffit pour donner les positions relatives.

$f(x) \underset{+\infty}{=} 2x - 2 + \dfrac{4}{3x} + o(\dfrac{1}{x})$, donc $f(x) - (2x-2) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{4}{3x}$.

On conclut que $f(x) - (2x-2) \geq 0$ au voisinage de $+\infty$ donc la courbe est au-dessus de l'asymptote dans un voisinage de $+\infty$.

Exercice 5 ✍ *Entraînement* ✍

On pose $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2(1-x)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.

2. En utilisant un développement limité au voisinage de 0, montrer que g est prolongeable par continuité au voisinage de 0. Justifier alors que g est dérivable en 0. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et la position relative courbe/tangente au voisinage de ce point.

3. g est-elle prolongeable par continuité en 1 ? en -1 ? On donnera un équivalent de g en chacune de ces valeurs.

Retour à la liste Analyse
Retour au planning

Jour 7 : Espaces vectoriels - Partie I

Consulter le site Exo7 :
http://exo7.emath.fr/cours/ch_ev.pdf et http://exo7.emath.fr/cours/ch_dimension.pdf

Retour à la liste Algèbre

Exercice 1 ♥ *Connaissance du cours* ♥

1. Donner la définition d'une famille libre dans un espace vectoriel E.
2. Donner la définition d'une famille génératrice d'un espace vectoriel E.
3. Donner la définition d'une base d'un espace vectoriel E, d'un sous-espace vectoriel F de E.
4. Citer le théorème de la base incomplète.
5. Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 2 ✍ *Entraînement* ✍ Choisissez de traiter un ou deux exemples.
Pour les ensembles suivants, dire s'ils sont des sous-espaces vectoriels de E. On justifiera la réponse.

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - z = 0 \text{ et } y + 2z = 0\}$.
2. Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{aX^3 + bX^2 + a + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. Dans $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
4. Dans $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, $F = \left\{ f \in E \ / \ \displaystyle\int_0^1 t\, f(t)\, dt = 0 \right\}$

Exercice 3 ✍ *Entraînement* ✍
Pour les familles suivantes, dire si elles sont libres. On justifiera la réponse.

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, $(\ (1, 1, -2),\ (-1, 2, 1),\ (-1, -9, -6)\ )$.
2. Dans $E = \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, (f_1, f_2, f_3) avec $f_1 \ :\ x \mapsto e^x$, $f_2 \ :\ x \mapsto e^{2x}$ et $f_3 \ :\ x \mapsto \ln x$.

Exercice 4 ✍ *Entraînement* ✍ Choisissez de traiter un ou deux exemples.
Montrer que les familles suivantes sont libres. Les compléter en une base de l'espace E.

1. Dans $E = \mathbb{R}^2$, (u_1) avec $u_1 = (1, -1)$.
2. Dans $E = \mathbb{R}^3$, (u_1, u_2) avec $u_1 = (1, -1, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 1)$.
3. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, (P_1, P_2) avec $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 + X - 1$.
4. Dans $E = M_2(\mathbb{R})$, (A_1, A_2) avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Dans $E = \mathbb{R}^4$, (u_1, u_2) avec $u_1 = (-1, 1, 2, 1)$ et $u_2 = (2, 3, 1, -4)$.

Exercice 5 ✍ *Entraînement* ✍
On pose $\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$ et $\mathcal{B}_2 = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner les coordonnées d'un vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans chacune de ces bases.

Retour à la liste Algèbre
Retour au planning

Jour 8 : Développements limités

Consulter le site Exo7 : http://exo7.emath.fr/cours/ch_dl.pdf

Retour à la liste Analyse

Exercice 1 ♥ *Connaissance du cours* ♥

1. Donner la définition de $f \sim g$ au voisinage de a.
   Donner une caractérisation de $f \underset{a}{\sim} g$ pour des fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a).

2. Avec des développements limités, on peut faire des calculs, *en faisant attention à bien gérer les "petits o"*.
   Peut-on faire les calculs suivants avec des équivalents ?
   - Des sommes ou des différences ?
   - Des produits ou des quotients ?
   - Passer à une puissance sur un équivalent ?
   - Passer à l'exponentielle sur un équivalent ?
   - Passer au logarithme sur un équivament ?

Exercice 2 ✍ *Entraînement* ✍

1. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$. **2.** Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\sin(x)$.
   Pour les questions suivantes, déterminer d'abord à quel ordre choisir les DL des fonctions usuelles, puis déterminer le DL ou l'équivalent demandé. Explicitez les calculs et les DLs utilisés.

3. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{\sin(x) - x}{x^2}$.

4. Développement limité à l'ordre 2 en 0 $\dfrac{x}{\ln(1+x)}$.

5. Équivalent en 0 de $e^x - \dfrac{1}{x}\ln(1+x)$

Exercice 3 ✍ *Entraînement* ✍

1. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$. **2.** Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\cos x$.
   Pour les questions suivantes, déterminer d'abord à quel ordre choisir les DL des fonctions usuelles, puis déterminer le DL ou l'équivalent demandé. Explicitez les calculs et les DLs utilisés.

3. Développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x\cos(x^2) - (e^x - 1)$.

4. Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{\cos x - 1}{1 - x}$.

5. Équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{1}{1+2/x} - 1 + \dfrac{2}{x}$.

Exercice 4 ✍ *Entraînement* ✍

1. Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\dfrac{1}{1+x^2}$. **2.** Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\arctan x$.
   Pour les questions suivantes, déterminer d'abord à quel ordre choisir les DL des fonctions usuelles, puis déterminer le DL ou l'équivalent demandé. Explicitez les calculs et les DLs utilisés.

3. Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{\mathrm{ch}x - 1}{\mathrm{sh}x}$

4. Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x\ln(1-\frac{x}{2})-(\frac{1}{1+x^2}-1)$.

5. Équivalent en $+\infty$ de $\frac{1}{x}\ln(1+x)-\frac{\ln x}{x}$.

Retour à la liste Analyse
Retour au planning

Jour 9 : Espaces vectoriels - Partie II

Consulter le site Exo7 :
http://exo7.emath.fr/cours/ch_ev.pdf et http://exo7.emath.fr/cours/ch_dimension.pdf

Retour à la liste Algèbre

Exercice 1 ✍ *Entraînement* ✍

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$.

1. Trouver une base de $F = \{(x, y, z) \in E \ / \ x - 2y + z = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

2. Décrire $G = \mathrm{Vect}((1, 1, 1), (0, 2, -1))$ (en donner une description comme celle de F).

3. Décrire $H = \mathrm{Vect}((-1, 1, -2))$ (en une description comme celle de F). Donner deux supplémentaires de H dans E.

Exercice 2 ✍ *Entraînement* ✍

On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Trouver une base de $F = \{aX^2 + aX + b, \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans E.

2. On considère $G = \mathrm{Vect}((X + 1)^2, X^2 - 1, X^2 + 6X + 5)$. Déterminer une base de G.

3. Décrire $H = \mathrm{Vect}(1, X^2)$ (en donner une description comme celle de F).

Exercice 3 ✍ *Entraînement* ✍

On se place dans $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une base de $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}, \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

2. On pose $G = \mathrm{Vect}(A^k, \ k \in \mathbb{N}) = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2, A^3, A^4, \dots)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que G est de dimension finie et en déterminer deux bases.

Exercice 4 ✈ *Prenons de la hauteur* ✈

On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $F = \{A \in E \ / \ A = {}^tA\}$ et $G = \{A \in E \ / \ {}^tA = -A\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E (on pourra raisonner par analyse-synthèse).

Exercice 5 ✈ *Prenons de la hauteur* ✈

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$, F est le sous-espace vectoriel des fonctions constantes de E et G_a le sous-espace vectoriel des fonctions s'annulant en a.
Montrer que F et G_a sont supplémentaires dans E.

Exercice 6 ✈ *Prenons de la hauteur* ✈

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E tels que $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E}$.
Soit F' un supplémentaire de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ dans F.
Montrer que $\mathrm{F}' \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$.

Retour à la liste Algèbre
Retour au planning

Jour 10 : Etudes de suites et fonctions

Consulter le site Exo7 : http://exo7.emath.fr/cours/ch_dl.pdf

Retour à la liste Analyse

Exercice 1 ✍ *Entraînement* ✍

Construire la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = (x+2)e^{1/x}$. On précisera les asymptotes éventuelles.

Exercice 2 ✍ *Entraînement* ✍

On définit la fonction f définie par $f(x) = ((x^2-2)(x+3))^{1/3}$. Préciser le domaine de définition de f. Déterminer l'asymptote oblique du graphe et préciser la position relative courbe/asymptote.

Exercice 3 ✍ *Entraînement* ✍

On considère, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, $g \ : \ x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\left(e^x - \dfrac{1+ax}{1-x/2}\right)$.

Déterminer a pour que g soit prolongeable par continuité en 0 (on pourra faire un DL(0) à un ordre bien choisi). Pour la valeur de a trouvée, montrer que g est dérivable en 0. Préciser une équation de la tangente à la courbe en ce point, et les positions relatives courbe/tangente.

Exercice 4 ✈ *Prenons de la hauteur* ✈

Sur cet exercice, vous devez aussi travailler la rédaction de vos réponses.

Soit $f \ : \ x \mapsto \dfrac{x^3 \ln(x)}{1-x^2}$.

1. Préciser le domaine de définition de f. Prouver que $f(x) = o(x^2)$ au voisinage de 0.
Montrer que $f(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{\ln x}{2(1-x)}$. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1.

2. Prouver que il existe $K \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in]0,1[, \ |f(x)| \leqslant Kx^2$. *On pourra s'intéresser à la fonction* $\varphi \ : \ x \mapsto \dfrac{x \ln x}{1-x}$ *et utiliser un théorème du chapitre sur la continuité.*

Exercice 5 ✈ *Prenons de la hauteur* ✈

Sur cet exercice, vous devez aussi travailler la rédaction de vos réponses.

Soit $f_n \ : \ x \mapsto x + \dfrac{n}{2}\ln x - n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que la fonction f_n admet un unique zéro dans $[1, e^2]$ noté a_n.

2. Montrer que la suite (a_n) est croissante puis déterminer sa limite l.

3. Déterminer un équivalent de $a_n - l$.

Retour à la liste Analyse
Retour au planning

Jour 11 : Applications linéaires

Consulter le site Exo7 :
http://exo7.emath.fr/cours/ch_ev.pdf et http://exo7.emath.fr/cours/ch_matlin.pdf

Retour à la liste Algèbre

Exercice 1 ♥ *Connaissance du cours* ♥

Soit f une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F. On suppose E de dimension finie, et on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

1. Montrer que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F.
3. Démontrer que pour une application linéaire entre deux espaces de même dimensiton finie, l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité sont équivalentes.

Exercice 2 ✍ *Entraînement* ✍

1. Pour chacune des applications suivantes, prouver qu'elle est linéaire, déterminer son noyau et son image (on en donnera une base si possible).

   a. $f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, y-x, x-y) \end{array}$

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$

2. **a.** Pour la 1. donner la matice de f entre les bases canoniques.

   b. Pour la 2. donner la matrice de f dans la base canonique dans le cas $n = 3$.

Exercice 3 ✍ *Entraînement* ✍

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$,
on considère le sous-espace vectoriel $F = \{(x,y,z,t) \;/\; x+y+z+t = x-2y = 0\}$

1. Donner une base de F. Vérifier que F et $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_1 - e_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ et donner une base $\mathcal{B}'$ adaptée à la somme directe $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.
2. On définit l'endomorphisme f en donnant $\ker f = F$ et $f(e_1) = e_2 + e_3$, $f(e_1 - e_3) = 3e_1 + e_2 - e_4$.

   a. Déterminer la matrice de f de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ et en déduire la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

   b. Donner une expression de $f(u)$ pour un vecteur $u = (x,y,z,t)$ quelconque de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 ✍ *Entraînement* ✍

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longmapsto & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longrightarrow & AM \end{array} \right.$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Rappeler la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Exprimer les images des vecteurs de cette base par f.
3. Déterminer $\ker f$.

Exercice 5 ✈ *Prenons de la hauteur* ✈

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mu : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longmapsto & \mathbb{R}[X] \\ P & \longrightarrow & P + (1-X)P' \end{array} \right.$

1. Montrer que μ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\mu)$ que l'on notera $\mathcal{B}_1$.

3. Déterminer une base de $\ker(\mu)$ que l'on notera $\mathcal{B}_2$.

4. Justifier que $\mathcal{B}$ constituée des vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}_2$ est une base de E.

5. Montrer que $\ker(\mu)$ et $\mathrm{Im}(\mu)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Retour à la liste Algèbre
Retour au planning

Jour 12 : Calcul intégral

Consulter le site Exo7 : http://exo7.emath.fr/cours/ch_int.pdf

Retour à la liste Analyse

Exercice 1 ♥♥ *Connaissance du cours* ♥♥

1. Établir un tableau des primitives usuelles sur une feuille A4.
2. Énoncer, et démontrer, le théorème d'intégration par parties (sans oublier les hypothèses sur les fonctions intervenant).
3. Énoncer le théorème de changement de variables.
4. Énoncer le théorème fondamental de l'intégration.

Exercice 2 ✍ *Entraînement* ✍ Indications au dos

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)dx$,
2. $\displaystyle\int \ln^2 x dx$,
3. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$.
4. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+1}dx$ puis $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+1}dx$.

Exercice 3 ✍ *Entraînement* ✍ Indications au dos

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x dx$,
2. $\displaystyle\int \sin^4 x dx$,
3. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x\sin^3 x}dx$.
4. $\displaystyle\int x\cos x\ e^x dx$,
5. $\displaystyle\int e^{2x}(x^3+2x^2-x+1)dx$.

Exercice 4 ✍ *Entraînement* ✍ Indications au dos

Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2-x}}\ dx$,
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\ dx$,
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+5}\ dx$,
4. $\displaystyle\int \frac{1}{3+4x-4x^2}dx$.

Retour à la liste Analyse

Indications

Exercice 2

1. $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)dx$, *passer par les complexes :* $\displaystyle\int e^{2x}\sin(3x)dx = Im(\int e^{(2+3i)x}\ dx)$.
   Ou effectuer deux intégrations par parties
2. $\displaystyle\int \ln^2 x dx$, *intégration par parties.*
3. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$. *intégration par parties, penser que* $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$ *est une dérivée....*
4. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+1}dx$ puis $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+1}dx$. *faire apparaître* $\dfrac{P'}{P}$ *et penser à* $x^2+2x+1=(x+1)^2$.

Retour à l'énoncé

Exercice 3

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3}dx$. *factoriser pour faire apparaître* $\dfrac{1}{(\frac{x}{\sqrt{3}})^2+1}$ *puis effectuer le changement de variables affines* $u=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.
2. $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x dx$, *linéariser en utilisant* $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ *et* $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{ix}}{2}$.
3. $\displaystyle\int \sin^4 x dx$, *linéariser.*
4. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x\sin^3 x}dx$. *faire apparaître* $\cos x\ dx$*, exprimer le reste en* $\sin x$ *et effectuer le changement de variable* $u=\sin x$. *On a* $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x\sin^3 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x\sin^3 x}\ \cos x dx$. *Ensuite penser à écrire au numérateur* $1 = 1-u^2+u^2$, *pour décomposer la fraction en deux fractions plus simples à primitiver.....*
5. $\displaystyle\int x\cos x\ e^x dx$, *passer aux complexes* ($\cos x\ e^x = Re(e^{(1+i)x})$ *ou* $\cos x\ e^x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}e^x$) *et intégrer par parties.*
6. $\displaystyle\int e^{2x}(x^3+2x^2-x+1)dx$. *Plusieurs intégrations par parties, ou chercher une primitive en devinant la forme que celle-ci doit/peut avoir.*

Retour à l'énoncé

Exercice 4

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2-x}}\ dx$,*commencer par poser* $u=\sqrt{2-x}$*, puis transformer la fraction* $\dfrac{1}{4-u^2} = \dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{2-u}+\dfrac{1}{2+u})$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\ dx$,*factoriser le trinôme du second degré, puis transformer la fraction.*
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+5}\ dx$,*mettre le trinôme sous forme canonique, puis faire un changement de variables.*
4. $\displaystyle\int \frac{1}{3+4x-4x^2}dx$.

Retour à l'énoncé

Retour à la liste Analyse

Retour au planning