Problème 213 *tangentes à un cercles issues d'un point*

B F Ra:2 Re:1 Tech:1 Ca:2

- Dans tout ce devoir, le plan est muni d'un repère $\mathcal{R} = \left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormé direct et notera $\mathcal{B}$ la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ des vecteurs du plan.
- On pourra noter $\mathrm{Mat}_{\mathcal{R}}(M)$ la matrice colonne des coordonnées d'un point M dans dans le repère $\mathcal{R}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u})$ la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $\mathcal{B}$.
- On notera par ailleurs $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ lorsque $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont deux bases d'un même espace vectoriel.

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω de rayon $R > 0$ ainsi qu'un point A extérieur au disque délimité par $\mathcal{C}$ c'est à dire tel que $\Omega A > R$.

On rappelle que la tangente à $\mathcal{C}$ en un point M de $\mathcal{C}$ est la droite passant par M et perpendiculaire au rayon $[\Omega M]$ et aussi qu'une droite d est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si elle admet un unique point d'intersection avec $\mathcal{C}$.

Le but du problème est de déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A de plusieurs manières différentes.

Pour cela on se place dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R}' = \left(\Omega, \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}'\right)$ où :

$$\overrightarrow{i}' = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\right\|}.\overrightarrow{\Omega A}$$

et on notera $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}'\right)$.

Partie I :*utilisation d'une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.*

1) Faire une figure représentant les éléments précédents et justifier que $\left\|\overrightarrow{i}'\right\| = 1$.
2) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$.
3) Justifier que les coordonnées de A dans $\mathcal{R}'$ sont de la forme $(x_A, 0)$ où x_A est un nombre réel tel que $x_A > R$.
4) Soit d une droite du plan passant par A.
   a) Justifier que si d est parallèle à l'axe des ordonnées, à savoir $(\Omega, \overrightarrow{j}')$, alors elle ne peut pas être tangente à $\mathcal{C}$.

   On supposera donc par la suite que d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

   b) Justifier qu'elle admet une équation cartésienne du type :
   $$y = m(x - x_A)$$
   où m est un nombre réel.
   c) Démontre qu'un point $M(x, y)$ est dans l'intersection $\mathcal{C} \cap d$ si et seulement si ses coordonnées vérifie :
   $$\begin{cases} (1+m^2)x^2 - 2m^2 x_A x + m^2 x_A^2 - R^2 & = & 0 \\ y & = & m(x - x_A) \end{cases} \tag{1}$$
   d) Démontrer alors que d est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si :
   $$m^2(x_A^2 - R^2) = R^2 \tag{2}$$
   e) En déduire qu'il existe deux points M sur $\mathcal{C}$ tels que (AM) est tangente à $\mathcal{C}$ en M et exprimer les coordonnées de ces points dans $\mathcal{R}'$ en fonction de x_A et R.

Partie II : *utilisation d'un paramétrage de $\mathcal{C}$.*

1) Soit M de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}'$ un point de $\mathcal{C}$. Démontrer qu'il existe $t \in [-\pi, \pi]$ tel que :

$$\begin{cases} x &= R\cos(t) \\ y &= R\sin(t) \end{cases}$$

(on demande ici de produire une démonstration **à partir du fait que $\boldsymbol{\Omega M = R}$.**)

2) Démontrer que la droite (AM) est tangente à $\mathcal{C}$ en M si et seulement si : $x_A \cos(t) = R$. (On passera par une formulation de la condition de tangence à l'aide du produit scalaire).
3) En déduire qu'il existe exactement deux points M du cercle tels que (AM) est tangente à $\mathcal{C}$ en M.

Partie III : *application à un cas particulier.*

On se place dans cette question dans le cas du cercle $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$$

et du point $A(0; 5)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1) Déterminer le centre Ω de $\mathcal{C}$ ainsi que son rayon R.
2) Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des vecteurs $\overrightarrow{i}'$ et $\overrightarrow{j}'$ du repère $\mathcal{R}'$ défini au départ.
3) En utilisant les résultats démontrés précédemment, donner les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ des points M_1 et M_2 de $\mathcal{C}$ tels que (AM) soit tangente à $\mathcal{C}$.
4) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
5) Justifier l'égalité :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{R}}(M) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{R}}(\Omega) + P \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\overrightarrow{\Omega M})$$
6) En déduire les coordonnées des deux points M_1, M_2 dans $\mathcal{R}$ ainsi que des équations cartésiennes de (AM_1) et (AM_2).
7) Faire une figure pour vérifier.