

Problème 1 : *projeté d'un point sur une courbe et distance minimale dans le plan.*

Dans tout ce problème le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Si $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction dans le repère précédent et A est un point du plan on considérera la **distance de $\mathcal{C}_f$ à A** définie par :

$$d(A, \mathcal{C}_f) = \inf \{AM, M \in \mathcal{C}_f\}$$

c'est à dire la borne inférieure des distances entre A et les points de $\mathcal{C}_f$.

Dans le cas où cet inf est atteint pour un unique point M de $\mathcal{C}_f$, on appellera ce point le **projeté de A sur $\mathcal{C}_f$** .

Partie I : *quelques exemples.*1. *Le cas de la distance à une droite.*

- a. Rappeler les formules que vous connaissez pour déterminer la distance d'un point à une droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

Indications

M un point du plan et A un point d'une droite $\mathcal{D}$ alors on a :

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|[\vec{AM}, \vec{u}]|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|\langle \vec{AM}, \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$$

ce qui donne dans un repère orthonormé direct si la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $ax + by + c = 0$ et le point A pour coordonnées (x_A, y_A) :

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- b. Déterminer la distance du point $A(1; -2)$ à la droite d passant par le point $B(2, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1)$

Indications

Utiliser simplement la formule du cours.

- c. Retrouver ce résultat en déterminant le projeté orthogonal de A sur d .

Indications

Si $M(x, y)$ est un point du plan écrire les deux conditions pour qu'il soit le projeté orthogonale de A sur d :

$$\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0 \quad , \quad [\vec{BM}, \vec{u}] = 0$$

(condition d'orthogonalité et condition pour $M \in d$.)

Réécrire ces deux conditions à l'aide des coordonnées pour obtenir un système en (x, y) puis déterminer le point M .

2. *Un exemple de distance à une courbe.*

Dans cette question on considère la parabole $\mathcal{P}$ courbe représentative de la fonction $t \mapsto t^2$ et on rappelle que l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(t, f(t))$ pour t dans $\mathbb{R}$.

On considère également le point $A(3, 0)$.

- a. Exprimer la distance $d(t)$ du point A à un point $M(t, f(t))$ de $\mathcal{P}$. Indications

Utiliser simplement la formule de distance entre deux points dans un repère orthonormé.

- b. En déduire que cette distance admet un minimum à préciser atteint en une unique valeur de t et préciser le projeté de A sur $\mathcal{P}$.

Indications

Démontrer que la fonction $t \mapsto d(t)$ est dérivable, puis étudier ses variations à l'aide du signe de la dérivée.

On notera que ce signe est celui d'une expression polynomiale de degré trois qu'il faudra factorisée à l'aide d'une racine évidente et du théorème de factorisation des polynômes.

- c. Faire une représentation graphique de la situation précédente. Vous ferez figurer le point projeté de A sur $\mathcal{P}$.
- d. Reprendre les calculs précédents dans le cas du point $B(0; 5)$ et démontrer que le projeté n'est pas défini dans ce cas. (On démontrera qu'il existe deux points de la courbe pour lesquels l'inf de la distance est atteint).

Indications

Mêmes calculs au départ mais ensuite on démontrera qu'il y a cette fois deux valeurs de t conduisant à deux points différentes de la courbe pour lesquels la distance avec A est minimale.

Partie II : distance d'un point à la courbe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Dans cette partie on considère la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et un point $A(x_A, y_A)$ dans le plan.

À chaque abscisse $x \in \mathbb{R}$, on associe le point $M_x(x, f(x))$ de $\mathcal{C}_f$ et le carré de sa distance au point A : $d(x) = AM_x^2$.

1. Soit g une application d'un ensemble E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Démontrer que g admet un minimum en $e_0 \in E$ si et seulement si $x \mapsto \sqrt{g(x)}$ admet un minimum en e_0 .

Indications

Procéder par double implication en supposant d'abord que g admet un minimum en e_0 . Écrire alors la définition d'un minimum puis utiliser la croissance de la fonction raciné carrée pour conclure.

Procéder de manière analogue pour la réciproque.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $d(x)$ en fonction de x (et des coordonnées de A).

Indications

Utiliser la formule des distances dans un repère orthonormé.

3. Démontrer que si une fonction continue sur $\mathbb{R}$ a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ elle admet un minimum.

Indications

Question très difficile.

- *Considérer une valeur de f : $y_0 = f(x_0)$*
- *Justifier ensuite qu'il existe un réel A tel que $f(x) > y_0$ pour tout $x \notin [-A, A]$.*
- *Utiliser le théorème sur le minimum des fonction continue sur un intervalle fermé borné.*
- *conclure.*

4. Démontrer qu'il existe un point M_x de la courbe de f pour lequel $d(x)$ est minimale. On notera alors $d(A, \mathcal{C}_f)$ la distance AM_x c'est à dire la distance minimale entre A et les points de la courbe de f .

Indications

Démontrer par inégalité que d tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Utiliser ensuite la question précédente.

5. Démontrer que d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, d'(x) = 2\overrightarrow{AM_x} \cdot \overrightarrow{t_x}$$

où $\overrightarrow{t_x}$ est le vecteur de coordonnées $(1, f'(x))$.

Indications

Cacluer simplement les deux membres de l'égalité en fonction de x .

6. Démontrer que si la distance de A à un point M_x de $\mathcal{C}_f$ est la distance minimale qu'on peut obtenir entre A et les points de $\mathcal{C}_f$ alors $\overrightarrow{AM_x} \cdot \overrightarrow{t_x} = 0$ ou $\overrightarrow{t_x}$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe de f en ce point M_x .

Indications

Utiliser la condition nécessaire pour avoir un minimum pour une fonction dérivable sur un intervalle ouvert.

7. Simplement à l'aide d'une figure justifier qu'en général :
 - a. il n'y a pas de réciproque à la propriété précédente,
 - b. il n'y a pas d'unicité d'un point M_x de $\mathcal{C}_f$ qui réalise la distance mininale entre A et les points de $\mathcal{C}_f$.

Partie III : le cas des fonctions convexes.

On se place dans cette question dans le cas d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et convexe c'est à dire vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$$

et on considère l'ensemble des points du plan qui seront dit "au-dessus" de $\mathcal{C}_f$:

$$\mathcal{C}_f^+ = \{M(x, y) : y \geq f(x)\}$$

et celui des points qui sont "au-dessous" de $\mathcal{C}_f$:

$$\mathcal{C}_f^- = \{M(x, y) : y \leq f(x)\}$$

On va démontrer que dans ce cas si $A(x_A, y_A)$ est au-dessous de $\mathcal{C}_f$, on a unicité du point dont l'existence a été démontrée à la partie II à savoir un point $M_x \in \mathcal{C}_f$ qui est tel que $d(A, \mathcal{C}_f) = AM_x$.

1. Démontrer que pour tout point $M_0(x_0, f(x_0))$ sur la courbe de f , la courbe de f est au-dessus de sa tangente au point M_0 ; c'est à dire que la tangente est incluse dans $\mathcal{C}_f^-$. (On pourra étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$).

Indications

L'indication est déjà donnée, Pour l'étude du signe de g' il faudra utiliser la croissance de f' . Le résultat cherché est la conséquence d'un minimum pour g .

2. Démontrer que si $M_1(x_1, y_1) \in \mathcal{C}_f^+$ et $M_2(x_2, y_2) \in \mathcal{C}_f^-$ sont deux points distincts du plan, l'intersection du segment $[M_1M_2]$ avec $\mathcal{C}_f$ est non vide. (On utilisera la fonction affine α telle que $\alpha(x_1) = y_1$ et $\alpha(x_2) = y_2$).

Indications

Question difficile.

Traiter le cas $x_1 \neq x_2$ puis l'autre.

Pour le premier utiliser la fonction $h : x \mapsto f(x) - \alpha(x)$ puis appliquer le Théorème de Valeurs Intermédiaire pour prouver l'existence d'un point commun au segment et à la courbe (ce qui se traduit par l'annulation de la fonction h).

3. Soient maintenant deux points $M_1(x_1, f(x_1))$ et $M_2(x_2, f(x_2))$ sur la courbe de f .
 - a. Démontrer que pour tout intervalle $[a, b]$ non vide et tout $t \in [0, 1]$ on a $(1 - t)a + tb \in [a, b]$.
Indications
Démontrer la double inégalité $a \leq (1 - t)a + tb \leq b$ en démontrant séparément chacune des inégalités.
 - b. On rappelle que si M et N sont deux point du plan, le segment $[MN]$ peut-être défini comme l'ensemble des points R pour lesquels il existe $t \in [0, 1]$ tel que : $\overrightarrow{MR} = t\overrightarrow{MN}$.
Démontrer que l'équivalence ci-dessous donne une représentation paramétrique du segment $[M_1M_2]$:

$$M(x, y) \in [M_1M_2] \iff \exists t \in [0, 1] : \begin{cases} x &= (1 - t)x_1 + tx_2 \\ y &= (1 - t)f(x_1) + tf(x_2) \end{cases}$$

- c. À l'aide d'une étude de fonction, démontrer que :

$$\forall t \in [0, 1], f((1 - t)x_1 + tx_2) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2).$$

(On fera la preuve dans le cas $x_2 > x_1$ et on utilisera la fonction $x \mapsto f((1 - t)x_1 + tx) - (1 - t)f(x_1) - tf(x)$ sur $[x_1, x_2]$).

Indications

Obtenir le tableau des variations de la fonction donnée en indication (variable x ...) sur l'intervalle $[x_1, x_2]$.

- d. En déduire en particulier que le milieu du segment $[M_1M_2]$ est dans $\mathcal{C}_f^+$.

Indications

Utiliser la question précédente avec une valeur bien choisie de t .

- e. Faire un graphique illustrant les deux questions précédentes dans le cas de la fonction $f : x \mapsto x^2$ et des points M_1 et M_2 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives -1 et 2 .
4. Soit $A(x_A, y_A)$ un point du plan tel que $y_A \leq f(x_A)$ et M_A un point de $\mathcal{C}_f$ tel que $d(A, \mathcal{C}_f) = AM_A$.
- a. Justifier l'existence d'un point M_A

Indications

Utiliser une des questions précédentes !

- b. Supposons qu'il existe un autre point de $\mathcal{C}_f$, $N_A \neq M_A$ tel que $d(A, \mathcal{C}_f) = AN_A$. On note I le milieu du segment $[M_A, N_A]$.
- i. Démontrer que pour tout point M du plan :

$$MI^2 = \frac{1}{2}MM_A^2 + \frac{1}{2}MN_A^2 - \frac{1}{4}M_A N_A^2$$

Indications

Utiliser la relation de CHASLES et les identités remarquables du produit scalaire avec le point I dans le deuxième membre de l'égalité.

- ii. En déduire l'unicité du point M_A tel que $d(A, \mathcal{C}_f) = AM_A$.

Indications

Question difficile.

Utiliser le résultat de la question précédente avec le point $M = A$ puis la question III.3.b pour obtenir l'existence d'un point de $\mathcal{F}$ pour lequel la distance à A est strictement inférieure à AM_A ... et conclure.

On appelle projeté du point A sur $\mathcal{C}_f$ le point M_A dont l'existence et l'unicité ont été démontrée précédemment dans le cas précisé, savoir une fonction f convexe et un point A dans $\mathcal{C}_f^-$.