Chapitre : algèbre - prérequis

Table des matières

A Familles de vecteurs

Bases *familles libres* 01.A.01

- Connaître la définition d'un famille libre :

$$\forall(\lambda_1,..,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ (\lambda_1 e_1+..+\lambda_n e_n=0_E \implies \lambda_1=..=\lambda_n=0)$$

- Savoir montrer qu'une famille est libre à partir de la définition
- Une famille extraite d'une famille libre est libre.

▸Exercices de base

Bases *bases d'un espace vectoriel* 01.A.02

Conditions pour qu'une famille $\mathcal{F}=(e_i)_{i\llbracket 1\ ;\ n\rrbracket}$ soit une base d'un espace vectoriel E.

- CNS : $\mathcal{F}$ libre et son nombre d'éléments égal à la dimension de l'espace E.
- CNS : $\mathcal{F}$ libre et génératrice de E.
- CS : $\mathcal{F}$ est la concaténation de bases de deux espaces supplémentaires.

▸Exercices de base

B Sous-espaces vectoriels

Bases *Sous-espace vectoriel* 01.B.01

F un sous ensemble de E espace vectoriel

- Connaître la définition de l'expression « F sous-espace vectoriel de E » en langage courant : F est non vide et stable par combinaison linéaire.
- Connaître les trois points à vérifier :
  - $F\subset E$.
  - $F\neq\emptyset$
  - $\forall(u,v)\in F^2,\forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2,\ \lambda_1 u+\lambda_2 v\in F$
- En fait on a deux méthodes pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
  - Vérifier les trois points ci-dessus.
  - Démontrer qu'on a en fait $F=\mathrm{Vect}(e_1,..,e_p)$ pour une famille de vecteurs de E à déterminer ce qui est parfois plus rapide.

▸Exercices de base

Bases *Espaces supplémentaires* 01.B.02

E_1,E_2 des sous-espace vectoriel dans E. On a les conditions suivantes pour qu'ils soient supplémentaires dans E :

- CNS : tout élément de E s'écrit **de manière unique** comme la somme de deux éléments l'un pris dans E_1 et l'autre dans E_2.
- CNS : $E_1+E_2=E$ et $E_1\cap E_2=\{O_E\}$
- CNS : $E_1\cap E_2=\{O_E\}$ et $\dim(E_1)+\dim(E_2)=\dim(E)$.

Les deux dernières conditions seront inapplicables lors de la généralisation de la notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires à plus de deux sous-espaces vectoriels . ▸Exercices de base

C Applications linéaires

Bases *Définition d'une application linéaire* 01.C.01

- Connaître la définition d'une application linéaire en langage courant : *« l'image d'une combinaison linéaire est la même combinaison linéaire des images »*.
- Connaître la définition formelle :

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2, \forall(u,v)\in E^2, f(\lambda_1 u+\lambda_2 v)=\lambda_1 f(u)+\lambda_2 f(v).$$

- Savoir bien sûr appliquer cette définition.

Ne pas confondre cela avec la démonstration de F sous-espace vectoriel de E.

▸Exercices de base

Bases *Théorème du rang* 01.C.02

- Connaître le théorème. $f\in\mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension finie alors :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))=\dim(E).$$

L'intérêt de de ce théorème est que si on connaît $\mathrm{Ker}(f)$ ou même seulement sa dimension alors on peut déterminer $\dim(\mathrm{Im}(f))$. Pour déterminer $\mathrm{Im}(f)$ il suffit ensuite de déterminer une famille libre d'éléments de $\mathrm{Im}(f)$ avec le bon cardinal pour avoir une base de celui-ci.

▸Exercices de base

D Matrices

Bases *Matrice d'un système* 01.D.01

- Savoir formuler un système linéaire sous forme matricielle : $AX=Y$.
- Dans le cas d'un système de n équations à n inconnues comprendre que l'existence et l'unicité de la solution sont équivalent à l'inversibilité de A.

Dans le cas A inversible, il faut avoir à l'esprit le calcul suivant :

$$AX=Y \iff A^{-1}AX=A^{-1}Y \iff I_nX=A^{-1}Y \iff X=A^{-1}Y.$$

▸Exercices de base

Bases *Matrices de passage (et changement de coordonnées)* 01.D.02

- Savoir dresser une matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$: elle est formées des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$
- Formule de changement de coordonnées :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e)=P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\times\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(e)$$

Le vocabulaire est trompeur. $P_{\mathcal{B},c\mathcal{B}'}$ est appelée « matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ » alors que la relation précédente montre que sa multiplication par des coordonnées <u>dans $\mathcal{B}'$</u> donne des coordonnées dans $\mathcal{B}$.

▸Exercices de base

Bases *Matrice d'une application linéaire* 01.D.03

$f \in \mathcal{L}(E_d, E_a)$ avec E_d (espace de départ), E_a (espace d'arrivée) de dimensions finies munit de base $\mathcal{B}_d$ et $\mathcal{B}_a$

- Savoir comment est formée la matrice d'une application linéaire : les colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}_a$ des images des éléments de $\mathcal{B}_d$.

  Ne pas confondre ces coordonnées avec les images ...
- Donnaître le théorème permettant le calcul des images à l'aide de la matrice.
  Si $e \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$:
  $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_a}(f(e)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_a,\mathcal{B}_d}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_d}(e)$$

▸Exercices de base

Bases *Théorème de changement de base (pour les applications linéaires)* 01.D.04

- $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases de E. A et B les matrices de f respectivement dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
  $$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{B',B} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{B,B'} = P^{-1}AP$$
- Domprendre la logique de cette formule. Si $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(e)$
  - $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X$ coordonnées de e dans $\mathcal{B}$
  - $AP_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X$ coordonnnées $f(e)$ dans $\mathcal{B}$
  - $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}AP_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X$ coordonnées de $f(e)$ dans $\mathcal{B}'$ c'est à dire BX

▸Exercices de base

E Exercices

Exercice *Liberté d'une famille* 01.A.01.01

1) Démontrer que les familles de vecteurs suivantes sont libres.
   a) Dans $\mathbb{R}^3$:
      - $\mathcal{F}_1 = ((1,2,0),(2,1,1)) = (u_1,u_2)$.
      - $\mathcal{F}_2 = ((1,2,0),(2,1,1),(1,1,1))) = (u_1,u_2,u_3)$
   b) Dans $\mathbb{R}[X]$: $\mathcal{F}_3 = (1+X, X^2, X) = (P_1,P_2,P_3)$.
   c) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $\mathcal{F}_4 = (x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto x, x \mapsto x\,\mathrm{e}^x) = (f_1,f_2,f_3)$.
   d) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
   $$\mathcal{F}_5 = \left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = (M_1,M_2,M_3).$$
2) Démontrer que la famille suivante n'est pas libre : $\mathcal{F}_6 = ((1,1,2),(1,2,1),(1,0,3))$.

▸Retour

Exercice *Démontrer qu'une famille est une base* 01.A.02.01

1) Dire si les familles de vecteurs suivantes sont des bases de l'espace précisé. Préciser à chaque fois quel partie quelle partie de la CNS vous employez.
   a) Dans $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{F} = ((1,-1),(1,2))$.
   b) Dans $\mathbb{R}^3$:
      - $\mathcal{F}_1 = ((1,2,0),(2,1,1))$
      - $\mathcal{F}_3 = ((1,2,0),(2,1,1),(1,1,1))$
   c) Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{F}_3 = (1, 2+X, 1+X^2)$.
   d) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
   $$\mathcal{F}_5 = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

▸Retour

Exercice *Sous-espaces vectoriels* 01.B.01.01

Démontrer dans chacun des cas suivants que F est un sous-espace vectoriel de l'espace indiqué (en choisisant la méthode la plu pertinente)

1) Dans $\mathbb{R}^3$: $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0\right\}$
2) Dans $\mathbb{R}^3$: $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+z=0 \text{ et } x+2y+z=0\right\}$
3) Dans $\mathbb{R}[X]$: $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X] : P''(X) + X^2P(X) = 0\right\}$
4) Dans $\boxed{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$: l'ensemble des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$ qu'on note $\mathcal{P}$.

   Un des $\mathbb{R}$-espace vectoriels usuels

▸Retour

Exercice *Vérifier qu'une application est linéaire* 01.C.01.01

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'application proposée est linéaire. (Il est indispensable de détailler toutes les opérations une à une ...). Préciser s'il s'agit d'une endomorphisme.

1) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'' + XP \end{array}$

2) $F : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) + f'(1) \end{array}$

3) $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & 2AM + MA \end{array}$

4) $f : \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{E}} & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{e} \rangle \overrightarrow{e} + \overrightarrow{u} \end{array}$

▸Retour

Exercice *utilisation du théorème du rang* 01.C.02.01

Soit f une application linéaire de E dans F où E, F sont des espace vectoriels de même dimension.

1) Démontrer à l'aide du théorème du range que si f est injective alors $\text{Im}\,(()\,f) = F$. En déduire que f est alors aussi bijective.
2) Démontrer que si f est surjective alors f est aussi injective.
3) Quelle équivalence très importante a-t-on ainsi démontré ?

▸Retour

Exercice *utilisation du théorème du rang* 01.C.02.02

Soit f une forme linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.
On suppose que f n'est pas l'application nulle.

1) Démontrer que $\text{Im}\,(f) = \mathbb{R}$.
2) En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$.

▸Retour

Exercice *Matrices et systèmes* 01.D.01.01

1) On considère le système linéaire posé dans $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 2y & = & 1 \\ -2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \end{array} \right.$$

   a) Écrire ce système sous forme matricielle $AX = Y$.
   b) Calculer A^{-1} et en déduire la résolution du système.

2) Si f est l'application linéaire canoniquement associée à A. Déterminer f^{-1} après avoir justifié son existence.

▸Retour

Exercice *Changement de coordonnées* 01.D.02.01

1) On se place dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère également les vecteurs $\overrightarrow{u}(1;2)$ et $\overrightarrow{v}(2,1)$.
   a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base des vecteurs du plan.
   b) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
   c) Si $\overrightarrow{w}$ a pour coordonnées (x, y) dans $\mathcal{B}$ déterminer ses coordonnées (x', y') dans dans $\mathcal{B}'$ en fonction de (x, y).

2) On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = ((1, X, X^2)$.
   a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (X(X-1), (X+1)(X-1), X(X+1))$ est une base de E.
   b) Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ déterminer les coordonnées de P dans $\mathcal{B}'$. On les notera λ, β, γ.
   c) Réciproquement si Q a pour coordonnées (α, β, γ) dans $\mathcal{B}'$, déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

▸Retour

Exercice *Matrice d'une application linéaire* 01.D.03.01

Dans chacun des cas suivants, dresser la matrice de l'application f entre les bases proposées notées $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ (on admet ici à chaque fois que f est linéaire).

1) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ base canonique de $\mathbb{R}^2$ et :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x - 2y, 2x + y).$$

2) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_2[X])$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et :

$$f : P \mapsto XP' + 3P.$$

3) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$, $\mathcal{B}_1$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$f : P \mapsto (P(1), P(2), P(3)).$$

▸Retour

Exercice *Images et matrice d'une application linéaire* 01.D.03.02

1) On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

   a) Soit $f \in \boxed{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$

   dont la matrice dans la base canonique est A.
      i. Déterminer $f((1, -1, 2))$.
      ii. Déterminer $\text{Ker}\,(f)$.
   b) Soit $g \in \mathcal{L}\,(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est A.
      i. Déterminer $g(2X^2 - X + 1)$.
      ii. Déterminer $\text{Ker}\,(g)$.

▸Retour

Exercice 1 *théorème du rang et matrice* 01.D.04

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
2) En déduire une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice *Changement de base* 01.D.04.01

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par :

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, x - y + 3z, 3x + 2y - z)$$

On considère deux bases de $\mathbb{R}^3$:

- La base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
- Une autre base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ où $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$.

1) Déterminer la matrice $T_{\mathcal{B}}$ de T par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$.
2) Trouvez la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
3) Calculer la matrice $T_{\mathcal{B}'}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

▸Retour

Exercice *Changement de base* 01.D.04.01

Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par :

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, x - y + 3z, 3x + 2y - z)$$

On considère deux bases de $\mathbb{R}^3$:

- La base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
- Une autre base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ où $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$.

1) Déterminer la matrice $T_{\mathcal{B}}$ de T par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$.
2) Trouvez la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
3) Calculer la matrice $T_{\mathcal{B}'}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

▸Retour