CH1-Exercices : Rappels et compléments d'algèbre linéaire PT -2024/2025

1. Révisions-Prérecquis

Exercice 1 *Systèmes et espaces vectoriels* F B Tech:1 Ca:2 Ob:1 e01000

Résoudre successivement les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^4$:

$$(S_1)\quad 2x_1+3x_2+x_3-x_4=0 \quad , \quad (S_2)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

en exprimant les ensembles de solutions sous forme d'espace vectoriel engendré par une famille libre.

Exercice 2 *Familles libres* C F Tech:3 Ob:3 Ca:2 e01001

Démontrer que les familles suivantes sont libres :

1) $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant 2}$ où $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$
2) $(f_a)_{a\in[\![0\ ;\ n]\!]}$ où $f_a : x\mapsto \mathrm{e}^{ax}$
3) $(X^kP)_{k\in[\![0\ ;\ n]\!]}$ où P est un polynôme non nul.

Exercice 3 *Supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$* Ca:1 Tech:1 F e01002

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par : $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-y-z=0\wedge 2x-z=0\}$.

1) Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2) Donner une base de F.
3) On pose $G_1=\mathrm{Vect}\left((0,0,1)\right)$ et $G_2=\mathrm{Vect}\left((0,1,0),(0,0,1)\right)$. G_1 est-il un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$? G_2 est-il un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4 *Matrice d'endomorphisme* F Ca:0 e01049

On considère l'endomorphisme de $E=\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de E est :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&-1\\1&-1&5\end{pmatrix}$$

1) Déterminer $f(X^2+2)$
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3) Modifier la matrice pour que f soit injective.

Exercice 5 *Matrices d'une même application* B Ob:1 Ca:1 e01017

On considère $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par $f\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{8}{3}x+\frac{2}{3}y,\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}y\right)\end{array}$.

On définit deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $u_1=(1,-1)$ et $u_2=(2,1)$.

1) Montrer que la famille (u_1,u_2) est une base. On notera $\mathcal{B}'=(u_1,u_2)$.

2) Déterminer $f(u_1)$ et $f(u_2)$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

3) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

4) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ à l'aide du théorème de changement de base.

Exercice 6 *Application linéaire sur les matrices*

F | C | Ca:1 | Ca:2 e01004

On note $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application f définie sur E par :

$$\forall M \in E,\ f(M) = AM - MA$$

où A est la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Démontrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.

2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E.

3) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 7 *Application linéaire sur les fonctions*

F | C | Tech:2 | Ca:2 | Ob:2 e01005

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f'' + 4f \end{array}$$

1) Démontrer que Φ est un endomorphisme.

2) On définit :

$$E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$$

avec $f_1 : t \mapsto \sin(2t)$, $f_2 : t \mapsto \cos(2t)$, $f_3 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin(2t)$, $f_4 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\cos(2t)$

a) Déterminer la dimension de E.

b) Démontrer que Φ induit un endomorphisme de E qu'on notera φ.

c) Déterminer le rang et le noyau de cet endomorphisme.

3) Démontrer que Φ induit une endomorphisme sur $F = \mathrm{Vect}(f_3, f_4)$ qu'on notera g puis démontrer que g est un automorphisme de F.

Exercice 8 *Application linéaire sur des fonctions polynomiales*

O | Ob:3 | Tech:2 | Ca:1 e01006

Soit n un entier naturel non nul. On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus n. On définit sur E l'application Φ qui a $f \in E$ associe la fonction :

$$\Phi(f) : x \mapsto \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$$

1) Démontrer que Φ est un endomorphisme de E.

2) Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de E.

3) Déterminer le noyau et l'image de Φ.

4) Démontrer que Φ commute avec l'application $D : f \mapsto f'$.

Exercice 9 *Famille libre*

Re:4 | Ra:4 | Ob:3 e01007

Soit f un endomorphisme sur un espace vectoriel E. On suppose qu' une famille $(u_i)_{i\in[\![1\ ;\ n]\!]}$ de vecteurs non nuls de E est telle que pour tout $i \in [\![1\ ;\ n]\!]$ il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ des scalaires distincts deux à deux tels que $f(u_i) = \lambda_i u_i$. Démontrer que la famille $(u_i)_{i\in[\![1\ ;\ n]\!]}$ est libre.

2. Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 10 *Réduction*
F | Ob:3 | Ra:3 | Tech:2 — e01021

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f$. On pose $E_1 = \{x \in E \ / \ f(x) = x\}$ et $E_{-1} = \{x \in E \ / \ f(x) = -x\}$. Montrer que $E = \text{Ker}\,(f) \oplus E_1 \oplus E_{-1}$.

Exercice 11 *Projecteurs/Symétries avec des fonctions et des polynômes*
Tech:1 | Ra:3 | Ob:3 | O — e01022

1) Dans $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note l'espace des fonctions paires $\mathcal{P}$ et l'espace des fonctions impaires $\mathcal{I}$.
   a) Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de E et montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires.
   b) On note p la projection sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$. Déterminer l'expression de $p(f)$ pour $f \in E$.
2) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $F = \{QP, \ Q \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   a) Rappeler le théorème de division euclidienne des polynômes.
   b) Montrer que $F \oplus \mathbb{K}_{n-1}[X] = \mathbb{K}[X]$.
   c) On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Déterminer l'expression de $s(A)$ pour A dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 12 *Supplémentaires et hyperplans*
C | B | Tech:1 | Ob:2 — e01023

1) Soit H un sous-espace vectoriel de E, de dimension finie, $H \neq E$. Montrer que H est un hyperplan si et seulement si pour tout $u \notin H$, H et $\text{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans E.
2) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ 2x + 3y - 5z = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.
3) Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \ P(1) = 0\}$ où $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 13 *Espaces stables*
B | Tech:1 | Ca:1 | Ob:2 — e01009

1) On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 9 & -12 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$
   On notera $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   a) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = ((-1, 2, 1), (-3, -2, -2), (-2, -1, -1))$.
   b) Donner deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ qui sont stables par f.
2) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
   a) Démontrer que $\text{Im}(f)$ est stable par f.
   b) Démontrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\text{Ker}(f - \lambda id_E)$ qui est stable par f.
   c) Démontrer plus généralement que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}^\star$, on a $\text{Ker}\left((f - \lambda id_E)^p\right)$ qui est stable par f.

Exercice 14 *Somme de trois sous-espaces vectoriels dans $\mathbb{R}_2[X]$*
C | F | Tech:3 | Ob:2 — e01010

On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on considère les trois ensembles ci-dessous :
$$E_1 = \{P \in E : \ P(-1) = P(0) = 0\}, E_{-1} = \{P \in E : \ P(0) = P(1) = 0\}, E_0 = \{P \in E : \ P(1) = P(-1) = 0\}.$$

1) Démontrer que E_{-1}, E_0 et E_1 sont des sous-espaces vectoriels de E.
2) Démontrer que $E_{-1} \oplus E_0 \oplus E_1 = E$.
3) Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ adaptée à la somme directe précédente.

Exercice 15

B e01048

On considère l'application linéaire f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (-5x-6y, 4x+5y) \end{array}$$

1) Démontrer que f est une symétrie vectorielle et en préciser les élément caractéristiques.
2) Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de s est diagonale. Préciser cette matrice diagonale.
3) Faire une représentation graphique des résultats précédents permettant une construction géométrique de $f(x,y)$

Exercice 16 *Matrice d'une projection et d'une symétrie*

B F Tech:1 Ca:2 e01012

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ et on définit :

$$D = \text{Vect}((1,-1,2)) \quad \text{et } P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : 2x - y + z = 0\right\}$$

1) Démontrer que $D \oplus P = \mathbb{R}^3$ et déterminer une base adaptée à cette décomposition de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection sur P suivant D et de la projection sur D suivant P.
3) Déterminer la matrice de la symétrie par rapport à P suivant D.

Exercice 17 *Décomposition en somme directe de noyaux*

C O Ra:3 Ob:2 e01013

On considère un endomorphisme f défini sur un espace vectoriel E et on suppose que :

$$f^2 = 4f.$$

1) Démontrer $e \in \text{Ker}(f - 4id_E) \iff f(e) = 4e$.
2) Démontrer par analyse synthèse que $\text{Ker}(f - 4\,\text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f) = E$.
3) Un exemple en dimension trois. On considère l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

   a) Démontrer que $f^2 = 4f$.
   b) Déterminer une base adpatée à la décomposition $\text{Ker}(f - 4id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$ puis la matrice de f dans cette base.