Chapitre : algèbre - prérequis

Table des matières

A Familles de vecteurs **1**
▹ Rappel A.01 : familles libres . . . 1
▹ Rappel A.02 : bases d'un espace vectoriel . . . 2

B Sous-espaces vectoriels **2**
▹ Rappel B.01 : Sous-espace vectoriel . . . 2
▹ Rappel B.02 : Espaces supplémentaires . . . 2

C Applications linéaires **3**
▹ Rappel C.01 : Définition d'une application linéaire . . . 3
▹ Rappel C.02 : Théorème du rang . . . 3

D Matrices **3**
▹ Rappel D.01 : Matrice d'un système . . . 3
▹ Rappel D.02 : Matrices de passage (et changement de coordonnées) . . . 3
▹ Rappel D.03 : Matrice d'une application linéaire . . . 4
▹ Rappel D.04 : Théorème de changement de base (pour les applications linéaires) . . . 4

E Exercices **5**
▹ Ex. A.01.01 : Liberté d'une famille . . . 5
▹ Ex. A.02.01 : Démontrer qu'une famille est une base . . . 8
▹ Ex. B.01.01 : Sous-espaces vectoriels . . . 8
▹ Ex. C.01.01 : Vérifier qu'une application est linéaire . . . 10
▹ Ex. C.02.01 : utilisation du théorème du rang . . . 11
▹ Ex. C.02.02 : utilisation du théorème du rang . . . 11
▹ Ex. D.01.01 : Matrices et systèmes . . . 11
▹ Ex. D.02.01 : Changement de coordonnées . . . 12
▹ Ex. D.03.01 : Matrice d'une application linéaire . . . 14
▹ Ex. D.03.02 : Images et matrice d'une application linéaire . . . 15
▹ Ex. D.04.01 : Changement de base . . . 18

A Familles de vecteurs

Bases *familles libres* 01.A.01

- Connaître la définition d'un famille libre :

$$\forall(\lambda_1, .., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ (\lambda_1 e_1 + .. + \lambda_n e_n = 0_E \implies \lambda_1 = .. = \lambda_n = 0)$$

- Savoir montrer qu'une famille est libre à partir de la définition
- Une famille extraite d'une famille libre est libre.

▸Exercices de base

Bases *bases d'un espace vectoriel* 01.A.02

Conditions pour qu'une famille $\mathcal{F} = (e_i)_{i\llbracket 1\ ;\ n\rrbracket}$ soit une base d'un espace vectoriel E.

- CNS : $\mathcal{F}$ libre et son nombre d'éléments égal à la dimension de l'espace E.
- CNS : $\mathcal{F}$ libre et génératrice de E.
- CS : $\mathcal{F}$ est la concaténation de bases de deux espaces supplémentaires.

▸Exercices de base

B Sous-espaces vectoriels

Bases *Sous-espace vectoriel* 01.B.01

F un sous ensemble de E espace vectoriel

- Connaître la définition de l'expression « F sous-espace vectoriel de E » en langage courant : F est non vide et stable par combinaison linéaire.
- Connaître les trois points à vérifier :
  - $F \subset E$.
  - $F \neq \emptyset$
  - $\forall(u, v) \in F^2, \forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda_1 u + \lambda_2 v \in F$
- En fait on a deux méthodes pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
  - Vérifier les trois points ci-dessus.
  - Démontrer qu'on a en fait $F = \mathrm{Vect}(e_1, .., e_p)$ pour une famille de vecteurs de E à déterminer ce qui est parfois plus rapide.

▸Exercices de base

Bases *Espaces supplémentaires* 01.B.02

E_1, E_2 des sous-espace vectoriel dans E. On a les conditions suivantes pour qu'ils soient supplémentaires dans E :

- CNS : tout élément de E s'écrit **de manière unique** comme la somme de deux éléments l'un pris dans E_1 et l'autre dans E_2.
- CNS : $E_1 + E_2 = E$ et $E_1 \cap E_2 = \{O_E\}$
- CNS : $E_1 \cap E_2 = \{O_E\}$ et $\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E)$.

Les deux dernières conditions seront inapplicables lors de la généralisation de la notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires à plus de deux sous-espaces vectoriels . ▸Exercices de base

C Applications linéaires

Bases *Définition d'une application linéaire* 01.C.01

- Connaître la définition d'une application linéaire en langage courant : *« l'image d'une combinaison linéaire est la même combinaison linéaire des images »*.
- Connaître la définition formelle :

$$\forall(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \forall(u, v) \in E^2, f(\lambda_1 u + \lambda_2 v) = \lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(v).$$

- Savoir bien sûr appliquer cette définition.

Ne pas confondre cela avec la démonstration de F sous-espace vectoriel de E.

▸Exercices de base

Bases *Théorème du rang* 01.C.02

- Connaître le théorème. $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie alors :

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(E).$$

L'intérêt de de ce théorème est que si on connaît $\operatorname{Ker}(f)$ ou même seulement sa dimension alors on peut déterminer $\dim(\operatorname{Im}(f))$. Pour déterminer $\operatorname{Im}(f)$ il suffit ensuite de déterminer une famille libre d'éléments de $\operatorname{Im}(f)$ avec le bon cardinal pour avoir une base de celui-ci.

▸Exercices de base

D Matrices

Bases *Matrice d'un système* 01.D.01

- Savoir formuler un système linéaire sous forme matricielle : $AX = Y$.
- Dans le cas d'un système de n équations à n inconnues comprendre que l'existence et l'unicité de la solution sont équivalent à l'inversibilité de A.

Dans le cas A inversible, il faut avoir à l'esprit le calcul suivant :

$$AX = Y \iff A^{-1}AX = A^{-1}Y \iff I_n X = A^{-1}Y \iff X = A^{-1}Y.$$

▸Exercices de base

Bases *Matrices de passage (et changement de coordonnées)* 01.D.02

- Savoir dresser une matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$: elle est formées des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$
- Formule de changement de coordonnées :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(e) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(e)$$

Le vocabulaire est trompeur. $P_{\mathcal{B},c\mathcal{B}'}$ est appelée « matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ » alors que la relation précédente montre que sa multiplication par des coordonnées <u>dans $\mathcal{B}'$</u> donne des coordonnées dans $\mathcal{B}$.

▶Exercices de base

Bases *Matrice d'une application linéaire* 01.D.03

$f \in \mathcal{L}(E_d, E_a)$ avec E_d (espace de départ), E_a (espace d'arrivée) de dimensions finies munit de base $\mathcal{B}_d$ et $\mathcal{B}_a$

- Savoir comment est formée la matrice d'une application linéaire : les colonnes sont les coordonnées dans $\mathcal{B}_a$ des images des éléments de $\mathcal{B}_d$.

  Ne pas confondre ces coordonnées avec les images ...
- Donnaître le théorème permettant le calcul des images à l'aide de la matrice.
  Si $e \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$:
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_a}(f(e)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_a,\mathcal{B}_d}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_d}(e)$$

▶Exercices de base

Bases *Théorème de changement de base (pour les applications linéaires)* 01.D.04

- $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases de E. A et B les matrices de f respectivement dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P_{B',B} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{B,B'} = P^{-1}AP$$
- Domprendre la logique de cette formule. Si $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(e)$
  - $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X$ coordonnées de e dans $\mathcal{B}$
  - $AP_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X$ coordonnnées $f(e)$ dans $\mathcal{B}$
  - $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}AP_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}X$ coordonnées de $f(e)$ dans $\mathcal{B}'$ c'est à dire BX

▶Exercices de base

E Exercices

Exercice *Liberté d'une famille* 01.A.01.01

1) Démontrer que les familles de vecteurs suivantes sont libres.

a) Dans $\mathbb{R}^3$:

- $\mathcal{F}_1 = ((1,2,0),(2,1,1)) = (u_1, u_2)$.

Corrigé.

- *Méthode rapide. Les deux vecteurs u_1, u_2 ne sont pas colinéaires (car les coordonnées ne sont pas proportionnelles), donc ces deux vecteurs forment une famille libre.*

Attention, on ne peut pas employer ce type d'argument pour plus de deux vecteurs.

- *Méthode générale. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et* $\boxed{\textit{tel que}}$ *Ce qui va suivre est supposé vrai*

:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

alors :

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = (0,0,0)$$

ce qui donne facilement $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$.

Ainsi la seule combinaison linéaire de u_1, u_2 qui est nulle est celle obtenue avec des coefficients nuls. La famille $\mathcal{F}_1$ est libre.

- $\mathcal{F}_2 = ((1,2,0),(2,1,1),(1,1,1))) = (u_1, u_2, u_3)$

Corrigé.

- *Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ et tel que :*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

alors :

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0)$$

ce qui donne facilement $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$. et donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On en déduit facilement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Ainsi la seule combinaison linéaire de u_1, u_2, u_3 qui est nulle est celle obtenue avec des coefficients nuls. La famille $\mathcal{F}_2$ est libre.

On note que la rédaction précédente est bien par déduction à partir de l'hypothèse de départ.

b) Dans $\mathbb{R}[X]$: $\mathcal{F}_3 = (1+X, X^2, X) = (P_1, P_2, P_3)$.

Corrigé.

Ici on ne peut pas utiliser l'argument rapide : « les polynômes sont de degrés différents deux à deux ».

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :

Il s'agit du polynôme nul le "zéro" des polynômes

$$\lambda_1(1+X) + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X = \boxed{0_{\mathbb{R}[X]}}$$

- *Méthode de l'évaluation (moins générale, parfois rapide). En évaluant successivement pour $0, -1$ et 1 on obtient :*

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

  ce qui donne bien $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  Ainsi la seule combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3 qui est nulle est celle obtenue avec des coefficients nuls. La famille $\mathcal{F}_3$ est libre.

- *Méthode de l'identification des coefficients.*
  On a :

$$\lambda_1(1+X) + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

  donc

$$\lambda_2 X^2 + (\lambda_1 + \lambda_3)X + \lambda_1 = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

  donc par identification des coefficients avec ceux du polynôme nul :

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

  ce qui donne bien $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  Ainsi la seule combinaison linéaire de P_1, P_2, P_3 qui est nulle est celle obtenue avec des coefficients nuls. La famille $\mathcal{F}_3$ est libre.

c) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $\mathcal{F}_4 = (x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto x, x \mapsto x\,\mathrm{e}^x) = (f_1, f_2, f_3)$.

Corrigé.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_2 f_3 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

La notation $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ est celle de la « fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ c'est à dire la fonction :

$$0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1\,\mathrm{e}^x + \lambda_2 x + \lambda_3 x\,\mathrm{e}^x = 0$$

En particulier on en déduit en utilisant successivent $x = 0, x = 1$ puis $x = -1$

$$\begin{cases} \lambda_1\,\mathrm{e}^0 = 0 \\ \lambda_1\,\mathrm{e}^1 + \lambda_2 + \lambda_3\,\mathrm{e}^1 = 0 \\ \lambda_1\,\mathrm{e}^{-1} - \lambda_2 + \lambda_3\,\mathrm{e}^{-1} = 0 \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \,\mathrm{e} = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 \,\mathrm{e}^{-1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \,\mathrm{e} = 0 \\ \lambda_3(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}) = 0 \end{cases} .$$

Comme $\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} \neq 0$ *la dernière égalité donne* $\lambda_3 = 0$ *puis on obtient facilement :* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Ainsi la seule combinaison linéaire de f_1, f_2, f_3 *qui est nulle est celle obtenue avec des coefficients nuls. La famille* $\mathcal{F}_3$ *est libre.*

d) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}_5 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = (M_1, M_2, M_3).$$

Corrigé. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. *Supposons que :*

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on en déduit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_2 = 0$.

Ainsi la seule combinaison linéaire de M_1, M_2, M_3 *qui est nulle est celle obtenue avec des coefficients nuls. La famille* $\mathcal{F}_5$ *est libre.*

2) Démontrer que la famille suivante n'est pas libre : $\mathcal{F}_6 = ((1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 0, 3))$.

Corrigé. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (0, 0, 0) &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système n'a pas pour unique solution $(0, 0, 0)$ *car par exemple le triplet :* $(-2, 1, 1)$ *est une solution.*

La famille $\mathcal{F}_6$ *est liée.*

▶Retour

Exercice *Démontrer qu'une famille est une base* 01.A.02.01

1) Dire si les familles de vecteurs suivantes sont des bases de l'espace précisé. Préciser à chaque fois quel partie quelle partie de la CNS vous employez.

 a) Dans $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{F} = ((1,-1),(1,2))$.

 Corrigé.

 |A| veut dire "nombre d'éléments de A"

 ▹ $\boxed{|\mathcal{F}|}$

 $= 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$

 ▹ *La famille $\mathcal{F}$ est une famille de $\mathbb{R}^2$ libre car les coordonnées des deux vecteurs qui la composent ne sont pas proportionnelles.*

 $\boxed{\textit{donc}}$

 CNS pour une base : libre et cardinal égal à la dimension de l'espace

 : *$\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.*

 b) Dans $\mathbb{R}^3$:

 ▸ $\mathcal{F}_1 = ((1,2,0),(2,1,1))$

 Corrigé. $\mathcal{F}_1$ ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^3$ car la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3 et la famille ne comporte que deux éléments (même CNS que précédemment).

 ▸ $\mathcal{F}_3 = ((1,2,0),(2,1,1),(1,1,1))$

 Corrigé. Même méthode et même CNS que pour $\mathcal{F}$. Pour la liberté utiliser par exemple la méthode vu en 01A01 (ou le déterminant si c'est fait).

 c) Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{F}_3 = (1, 2+X, 1+X^2)$.

 Corrigé.

 ▹ *La famille $\mathcal{F}_3$ est une famille de polynômes de degré distincts deux à deux, elle est donc libre.*

 ▹ *De plus c'est une famille dans $\mathbb{R}_2[X]$ avec $|\mathcal{F}_3| = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$*

 donc $\mathcal{F}_3$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. (Toujours la même CNS).

 d) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}_5 = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right).$$

 Corrigé.

 ▹ *$\mathcal{F}_5$ est une famille de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec $|\mathcal{F}_5| = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$*

 ▹ *De plus $\mathcal{F}_5$ est libre (utiliser la même méthode qu'à l'exercice 01A01)*

 Ainsi, $\mathcal{F}_5$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

▶Retour

Exercice *Sous-espaces vectoriels* 01.B.01.01

Démontrer dans chacun des cas suivants que F est un sous-espace vectoriel de l'espace indiqué (en choisissant la méthode la plus pertinente)

1) Dans $\mathbb{R}^3$: $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0\}$

 On n'a pas supposé $e \in F$...

 Corrigé. Soit $\boxed{e = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned} e \in F &\iff x+y=0 \\ &\iff y=-x \\ &\iff e=(x,-x,z)=x.(1,-1,0)+z.(0,0,1) \\ &\iff e \in \operatorname{Vect}((1,1,0),(0,0,1)) \end{aligned}$$

Ainsi : $F = \operatorname{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$ et en conséquence F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

La méthode est ici de démontrer qu'en fait, l'espace vectoriel proposé s'exprime comme l'espace vectoriel engendré par une famille de vecteur (un « Vect »...)

2) Dans $\mathbb{R}^3$: $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y+z=0 \text{ et } x+2y+z=0\right\}$

Corrigé.

Soit $e=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} e \in F &\iff \begin{cases} x-y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x-y+z=0 \\ 3y=0 \qquad\qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=-z \\ y=0 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases} \\ &\iff e=(-z,0,z)=z.(-1,0,1) \\ &\iff e \in \operatorname{Vect}((-1,0,1)) \end{aligned}$$

Ainsi : $F = \operatorname{Vect}((-1,0,1))$ et en conséquence F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3) Dans $\mathbb{R}[X]$: $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X] : P''(X) + X^2P(X) = 0\right\}$

Corrigé.

Dans de telles situation, il est parfois possible également d'utiliser la méthode précédente mais ... la réalisation peut se révéler très diffile. On va utiliser l'autre méthode.

On vérifie les trois points qui montre que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$

- *On a $F \subset \mathbb{R}[X]$ par définition de F.*
- *Pour $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ on a $P'' = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc :*

$$P''(X) + X^2P(X) = 0_{\mathbb{R}[X]} + 0_{\mathbb{R}[X]} = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

  ce qui donne que $O_{\mathbb{R}[X]} \in F$.
- *Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et P_1, P_2 dans $\mathbb{R}[X]$ puis $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$. On a :*

$$\begin{aligned} P''(X) + X^2 + P(X) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)''(X) + X^2(\lambda_1 P_1(X) + \lambda_2 P_2(X)) \\ &= \lambda_1 P_1''(X) + \lambda_2 P_2''(X) + X^2 \lambda_1 P_1(X) + X^2 P_2(X) \qquad \text{(linéarité de la dérivarion)} \\ &= \lambda_1(P_1''(X) + X^2 P_1(X)) + \lambda_2(P_2''(X) + X^2 P_2(X)) \\ &= O_{\mathbb{R}}[X] \qquad \text{(car)} P_1, P_2 \in F \end{aligned}$$

  Ainsi, F est stable par combinaison linéaire.

  Finalement, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

4) Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$Un des $\mathbb{R}$-espace
vectoriels usuels : l'ensemble des fonctions paires définies sur $\mathbb{R}$ qu'on note $\mathcal{P}$.

Corrigé.

- *$\mathcal{P}$ est inclus dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
- *Soit f la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$ et :*

$$(f(x) = 0 = f(-x).$$

La fonction nulle est donc une fonction paire et donc elle appartient à $\mathcal{P}$.

- *Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et f_1, f_2 dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ puis $\boxed{f = \lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2}$.*

+ et . entre fonctions ..

.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(-x) \\ &= \lambda_1 f1(-x) + \lambda_1 f_2(-x) && \text{déf. de } \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \\ &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) && f_1, f_2 \text{ sont paires} \\ &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) && \text{déf. de } \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \end{aligned}$$

et ainsi $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est dans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$ est stable par combinaison linéaire.

Finalement $\mathcal{P}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

▸Retour

Exercice *Vérifier qu'une application est linéaire* 01.C.01.01

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'application proposée est linéaire. (Il est indispensable de détailler toutes les opérations une à une ...). Préciser s'il s'agit d'une endomorphisme.

1) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P'' + XP \end{array}$

2) $F: \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) + f'(1) \end{array}$

3) $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & 2AM + MA \end{array}$

4) $f: \begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{E}} & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \overrightarrow{u} & \mapsto & 2\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{e} \rangle \overrightarrow{e} + \overrightarrow{u} \end{array}$

Corrigé.

1) *Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]$ puis $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Notons $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$.*

$$\begin{aligned} f(P) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'' + X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) \\ &= \lambda_1 P_1'' + \lambda_2 P_2'' + \lambda_1 X P_1 + \lambda_2 X P_2 && \text{(Linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda_1 (P_1'' + XP_1) + \lambda_2 (P_2'' + XP_2) && \text{(Commutativité)} \\ &= \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2) && \text{(déf. de } f) \end{aligned}$$

Ainsi f est bien linéaire.

De plus $f(P)$ est un polynôme pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ donc, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2) *Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(f_1, f_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$. Notons $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.*

$$\begin{aligned} F(f) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0) + (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)'(1) && \text{déf. de } F \\ &= \lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0) + (\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2')(1) && \text{déf. } +,. \text{ et linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0) + \lambda_1 f_1'(0) + \lambda_2 f_2'(1) && \text{déf. } +,. \\ &= \lambda_1 (f_1(0) + f'(1)) + \lambda_2 (f_2(0) + f_2'(1)) && \text{règles alg.} \\ &= \lambda_1 F(f_1) + \lambda_2 F(f_2) \end{aligned}$$

et ainsi F est linéaire sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Par contre ce n'est pas un endomorphisme car l'espace vecotriel d'arrivé est $\mathbb{R}$ qui est différent de l'espace de départ.

▸Retour

Exercice *utilisation du théorème du rang* 01.C.02.01

Soit f une application linéaire de E dans F où E, F sont des espace vectoriels de même dimension.

1) Démontrer à l'aide du théorème du range que si f est injective alors $\operatorname{Im}(() f) = F$. En déduire que f est alors aussi bijective.
2) Démontrer que si f est surjective alors f est aussi injective.
3) Quelle équivalence très importante a-t-on ainsi démontré ?

▸Retour

Exercice *utilisation du théorème du rang* 01.C.02.02

Soit f une forme linéaire d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.
On suppose que f n'est pas l'application nulle.

1) Démontrer que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$.
2) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$.

▸Retour

Exercice *Matrices et systèmes* 01.D.01.01

1) On considère le système linéaire posé dans $\mathbb{R}^3$:

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & 2y & = & 1 \\ -2x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \end{array} \right.$$

a) Écrire ce système sous forme matricielle $AX = Y$.
Corrigé. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, le système proposé est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est à dire :

$$AX = Y$$

où :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

b) Calculer A^{-1} et en déduire la résolution du système.
Corrigé. La méthode du pivot donne :

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}$$

Or :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ainsi l'unique solution du système $\mathcal{S}$ est : $\boxed{\textit{(-2,-11,8)}}$

2) Si f est l'application linéaire canoniquement associée à A. Déterminer f^{-1} après avoir justifié son existence.

Corrigé. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Comme f admet A comme matrice, f et un isomorphisme A est inversible, ce qui est le cas et donc f est un isomorphisme et f^{-1} est défini (de $\mathbb{R}^3$ dans lui même De plus : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}})^{-}1$

On en déduit que pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(f(x,y,z)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((x,y,z)) = A^{-1} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ -x-4y-6z \\ x+3y+4z \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne :

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (-y-z, -x-4y-6z, x+3y+4z) \end{array}$$

Faire le rapport entre l'affirmation précédente et le fait que f^{-1} est l'application qui calcule les antécédents des éléments de $\mathbb{R}^3$ par f ... ce qui revient à résoudre un système du type $\mathcal{S}$.

▸Retour

Exercice *Changement de coordonnées* 01.D.02.01

1) On se place dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On considère également les vecteurs $\overrightarrow{u}(1;2)$ et $\overrightarrow{v}(2,1)$.

a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base des vecteurs du plan. *Corrigé. On a :*

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

et donc la famille $\mathcal{B}'$ est une base des vecteurs du plan.

b) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Corrigé. Les colonnes de la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimées dans $\mathcal{B}$ ce qui donne :

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) Si $\overrightarrow{w}$ a pour coordonnées (x, y) dans $\mathcal{B}$ déterminer ses coordonnées (x', y') dans dans $\mathcal{B}'$ en fonction de (x, y).

Corrigé. On sait que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Or on trouve facilement par la méthode du pivot que :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \end{pmatrix}}$$

2) On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = ((1, X, X^2)$.

a) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (X(X-1), (X+1)(X-1), X(X+1))$ est une base de E.

Corrigé.

- *La famille $\mathcal{B}'$ est bien formées de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ puisque car par les règles sur les produits on a :*

$$\deg(X(X-1)) = \deg(X+1)(X-1)) = \deg(X(X+1)) = 1 + 1 = 2$$

- *D'abord on observe $|\mathcal{B}| = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Il reste donc à montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre.*
- *Soit λ, β, γ dans $\mathbb{R}^3$ tel que :*

$$\lambda X(X-1) + \beta(X+1)(X-1) + \gamma X(X+1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

En évaluant en 1 on en déduit :

$$2\gamma = 0$$

et donc

$$\gamma = 0$$

On trouve de même que $\lambda = \beta = 0$ en évaluant en 0 puis -1. Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$

- *Finalement $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$.*

b) Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ déterminer les coordonnées de P dans $\mathcal{B}'$. On les notera λ, β, γ.

Corrigé.

- *On détermine la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a :*

$$X(X-1) = X^2 - X = 0 - 1.X + 1.X^2$$

$$(X+1)(X-1) = X^2 - 1 = -1 + 0.X + 1.X^2$$

$$X(X+1) = X^2 + X = 0 + 1.X + 1.X^2$$

ce qui donne :

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P}$$

- *On détermine $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P^{-1}$ par la méthode du pivot et on en déduit :*

$$\boxed{P^{-1} =}$$

- *On a d'après l'expression de $P(X)$ on a :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

et donc par changement de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c-b+a) \\ -c \\ \frac{1}{2}(c+b+a) \end{pmatrix}$$

Finalement on a :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c-b+a) \\ -c \\ \frac{1}{2}(c+b+a) \end{pmatrix}}$$

c) Réciproquement si Q a pour coordonnées (α, β, γ) dans $\mathcal{B}'$, déterminer ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

Corrigé. On a

$$\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ -\alpha+\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma \end{pmatrix} i$$

▸Retour

Exercice *Matrice d'une application linéaire* 01.D.03.01

Dans chacun des cas suivants, dresser la matrice de l'application f entre les bases proposées notées $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ (on admet ici à chaque fois que f est linéaire).

1) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ base canonique de $\mathbb{R}^2$ et :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x - 2y, 2x + y).$$

Corrigé. On détermine les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$ qui est ici la base canonique :

$$f((1,0)) = \frac{1}{2}(1,2) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad \text{et} \quad f((0,1)) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

$\mathcal{B}_2$ est ici encore la base canonique donc les coordonnées des vecteurs $f((1,0))$ et $f((0,1))$ sont en fait ces vecteurs eux-même.

Cette identification du vecteur avec ses coordonnées ne fonctionne que dans $\mathbb{R}^n$ **avec la base canonique**.

On en déduit :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

2) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_2[X])$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et :

$$f : P \mapsto XP' + 3P$$

Base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

Corrigé. $\boxed{\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2)}$

$f(1) = X \times 0 + 3 \times 1 = 3$, $f(X) = X \times 1 + 3X = 4X$, $f(X^2) = X \times 2X + 3 \times X^2 = 0.1 + 2.X^2 + 3.X^2$
Ce qui donne la matrice de f dans la base canonique dont les colonnes sont formées par les coordonnées des images précédentes dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

3) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$, $\mathcal{B}_1$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$f : P \mapsto (P(1), P(2), P(3)).$$

Corrigé. $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2)$ *et* $\mathcal{B}_2 = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$. *On a :*

$$f(1) = (1,1,1) \quad f(X) = (1,2,3) \quad f(X^2) = (1,4,9)$$

Ce qui donne la matrice de f entre $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}}$$

▸Retour

Exercice *Images et matrice d'une application linéaire* 01.D.03.02

1) On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

a) Soit $f \in \boxed{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)}$ dont la matrice dans la base canonique est A.

i. Déterminer $f((1, -1, 2))$.

Corrigé. *On a :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e)) &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{f(e) = (6, 0, 6)}$$

Il faut bien différencier l'objet e qui est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de sa matrice de coordonnées dans la base canon

qui est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *... même si dans la base canonique, les coefficients sont les mêmes (mais dans une autre base ce ne serait pas le cas)*

ii. Déterminer $\operatorname{Ker}(f)$.

Corrigé. Soit $e = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned}
e \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(e) = 0 \\
&\iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(vecteurs égaux ssi} \\
&\iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(e) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -\frac{5}{2}z \\ y & = & -\frac{1}{2}z \end{array} \right. \iff e = \left(-\frac{5}{2}z, -\frac{1}{2}z, z\right) \iff e = z.\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \right) \\
&\iff e \in \operatorname{Vect}\left(\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\right)}$$

b) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est A.

i. Déterminer $g(2X^2 - X + 1)$.

Corrigé. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $P = 2X^2 - X + 1$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(2X^2 - X + 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et donc par le même calcul que pour la question a) :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g(P)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ce qui donne que :

$$\boxed{g(P) = 4X^2 - X + 1}$$

ii. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(g)$.

Corrigé. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}\,(g) &\iff g(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ &\iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On retrouve exactement le même calcul qu'au a) ce qui donne

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}\,(g) &\iff (c, b, a) = \times \left(-\frac{5}{2}a, -\frac{1}{2}, a\right) \\ &\iff P(X) = -\frac{5}{2}a - \frac{1}{2}aX + aX^2 \\ &\iff P(X) = a\left(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}X + X^2\right) \\ &\iff P \in \mathrm{Vect}\left(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}X + X^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(g) = \mathrm{Vect}\left(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}X + X^2\right)}$$

▸Retour

Exercice 1 *théorème du rang et matrice* 01.D.04

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

1) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Corrigé. *On note* $\mathcal{B}$ $\boxed{\textit{la base canonique de } \mathbb{R}^3.}$

. A est la matrice de f dans $\mathcal{B}$ *(car f est canoniquement associée à A). Soit* $e=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
e\in\operatorname{Ker}(f) &\iff f(e)=0_{\mathbb{R}^3}\\
&\iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e))=0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\\
&\iff \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\times\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(e)=0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} && \text{(Th. f}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&-&y&+&z&=&0\\ 2x&+&y&+&5z&=&0\\ x&+&&&2z&=&0\end{array}\right. && \text{(d}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x&-&y&+&z&=&0&\\ &&3y&+&3z&=&0&L_2-2L_1\\ &&y&+&z&=&0&L_3-L_1\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x&-&y&+&z&=&0\\ &&y&+&z&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&-2z\\ y&=&-z\end{array}\right. \iff e=(-2z,-z,z)=z.(-2,-1,1)\\
&\iff e\in\operatorname{Vect}((-2,-1,1))
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}((\text{-2,-1,1}))}$$

Comme la famille $\mathcal{F}=((-2,-1,1))$ *est libre (formée d'un seul vecteur non nul) et qu'elle est génératrice de* $\operatorname{Ker}(f)$ *c'est une base de* $\operatorname{Ker}(f)$ *qui est donc de dimension 1.*

2) En déduire une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Corrigé. *f est une application linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}$*, le théorème du rang donne donc :*

$$\dim(\operatorname{Ker}(f))+\dim(\operatorname{Ker}(f))=\dim(\mathbb{R}^3)=3$$

et donc d'après la question précédente :

$\mathcal{B}$ *est la base canonique ...*

$$\boxed{\dim(\operatorname{Im}(f))=2}$$

On considère alors les vecteurs e_1,e_2 *dont les coordonnées dans* $\mathcal{B}$ *sont les deux premières colonnes de A.* $\boxed{\textit{On a :}}$

$$\mathcal{F}_2=(e_1,e_2)=((1,2,1),(-1,1,0))$$

La famille $\mathcal{F}_2$ *est libre car formée de* <u>*deux*</u> *vecteurs non colinéaires. De plus elle est formé d'éléments de* $\operatorname{Im}(f)$ *par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base. Comme de plus* $|\mathcal{F}_2|=\dim(\operatorname{Im}(f))$ *on en déduit que* $\mathcal{F}_2$ *est une base de* $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice *Changement de base* 01.D.04.01

Soit $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par :

$$T(x,y,z)=(2x+y-z,x-y+3z,3x+2y-z)$$

On considère deux bases de $\mathbb{R}^3$:

- La base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.
- Une autre base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ où $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$.

1) Déterminer la matrice $T_\mathcal{B}$ de T par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$. *Corrigé. Pour trouver la matrice $T_\mathcal{B}$, nous appliquons T à chaque vecteur de la base canonique $\mathcal{B}$:*

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T(1, 0, 0) = (2, 1, 3)\\ T(e_2) &= T(0, 1, 0) = (1, -1, 2)\\ T(e_3) &= T(0, 0, 1) = (-1, 3, -1) \end{aligned}$$

La matrice $[T]_\mathcal{B}$ est donc :

$$T_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Trouvez la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
Corrigé. La matrice de passage P est formée des coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Calculer la matrice $T_{\mathcal{B}'}$ de T par rapport à la base $\mathcal{B}'$.
Corrigé. Pour trouver $T_{\mathcal{B}'}$, nous utilisons le théorème de changement de base qui donne que :

$$T_{\mathcal{B}'} = P^{-1} T_\mathcal{B} P.$$

D'abord, calculons P^{-1} :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ensuite, nous calculons $T_{\mathcal{B}'}$:

$$T_{\mathcal{B}'} = P^{-1} T_\mathcal{B} P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En effectuant les multiplications matricielles, nous obtenons :

$$\boxed{T_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2\\ -2 & 0 & 3\\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}}$$

▸Retour