

Cahier de vacances en Mathématiques en PTSI Rentrée 2026

Sup PTSI, Lycée Ferdinand Buisson, Voiron

23 juin 2026

Utilité et utilisation de ce livret

Ce livret a pour but de définir quelques concepts simples et quelques techniques qui seront utiles dès le début d'année en mathématiques et en physique. Ce livret vous servira pour débiter l'année de PTSI dans de bonnes conditions. L'année de mathématiques en classes préparatoires est dure, longue et difficile. **Il est donc indispensable de travailler cet été avec ce livret. Toutes les notions et techniques de calculs de ce livret seront supposées acquises dès le jour de la rentrée!**

Pour travailler efficacement **il faut travailler régulièrement** (idéalement tous les jours, ne surtout pas attendre les 15 derniers jours d'août ...).

Que trouve t'on dans ce livret ?

Dans ce livret on trouvera quelques notions de cours, des exemples, et des exercices et problèmes corrigés ! Il faut bien sur bien travailler tous les exercices de ce livret.

Première partie

Notations

1 Rudiments de logique

Une *proposition* est un énoncé mathématique au sujet duquel on peut poser la question "l'énoncé est-il vrai?". Nous avons défini la *valeur de vérité* d'une proposition mathématique comme soit vraie (V), soit fausse (F) mais jamais vraie et fausse à la fois. Soit P une proposition.

La proposition "non P " est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

Example 1. La négation de « Je suis majeur. » est « Je suis mineur. ». Si la proposition « Je suis majeur. » est vraie, alors la proposition « Je suis mineur. » est fausse. Si la proposition « Je suis majeur. » est fausse, alors la proposition « Je suis mineur. » est vraie.

Soient P et Q deux propositions mathématiques. La proposition P et Q est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon.

Example 2. La conjonction de "Je suis majeur" et "je suis vacciné" est "Je suis majeur et vacciné".

Soient P et Q deux propositions mathématiques. La proposition P ou Q est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie (et possiblement les deux), et fausse dans le seul cas où P et Q sont fausses.

Example 3. La disjonction de « Je lis à la plage » et « Je bronze à la plage » est « Je lis ou je bronze à la plage ».

2 Signification de quelques symboles

Quantificateurs et connecteurs logiques

Symboles ensemblistes

\in : «appartient»
 \subset : «est inclus dans»
 \emptyset : «ensemble vide»
 \cup : «union»
 \cap : «intersection»
 \setminus ou bien $-$: «privé de»

\forall : «pour tout» ou «quelque soit» (quantificateur universel)
 \exists : «il existe ... tel que» (quantificateur existentiel)
 $\exists!$: «il existe un unique ... tel que»
 \implies : «implique» ou «si ... alors» (implication)
 \iff : «équivalent» ou «si et seulement si» (équivalence)
 \wedge : «conjonction logique» (et)
 \vee : «disjonction logique» (ou)

2.1 Abréviations

ie ou bien $\text{c}\grave{\text{a}}\text{d}$: "id est (latin), c'est à dire".

eg : "exempli gratia (latin), par exemple".

ssi : "si et seulement si."

cqfd ou bien \square : "ce qui fallait démontré" (se place en fin de démonstration).

2.2 Symboles somme, produit, réunion et intersection

$\sum_{k=p}^q a_k$: "somme des a_k , l'entier k variant de p à q " ($:= a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$)

$\prod_{k=p}^q a_k$: "produit des a_k , l'entier k variant de p à q " ($:= a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_q$)

Pour des ensemble A_p, A_{p+1}, \dots, A_q

$\bigcup_{k=p}^q A_k$: "réunion des A_k , l'entier k variant de p à q " ($:= A_p \cup A_{p+1} \cup \dots \cup A_q$)

$\bigcap_{k=p}^q A_k$: "Intersection des A_k , l'entier k variant de p à q " ($:= A_p \cap A_{p+1} \cap \dots \cap A_q$)

2.3 Lettres grecques

α : alpha	β : beta	γ, Γ : gamma	δ, Δ : delta	ε : epsilon
ζ : zeta	η : eta	θ, Θ : theta	ι : iota	κ : kappa
λ, Λ : lambda	μ : mu	ν : nu	ξ, Ξ : xi	π, Π : pi
ρ : rho	σ, Σ : sigma	τ : tau	Υ : upsilon	φ, Φ : phi
χ : chi	ψ, Ψ : psi	ω, Ω : omega		

2.4 Géométrie

$\|\vec{u}\|$: norme de \vec{u} .

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v}$: produit scalaire de \vec{u} et de \vec{v} .

$\vec{u} \wedge \vec{v}$: produit vectoriel de \vec{u} et de \vec{v} .

\perp : orthogonal.

(\vec{u}, \vec{v}) : mesure de l'angle entre \vec{u} et \vec{v} .

$\text{rot}_{A,\theta}$: rotation de centre A et d'angle θ .

Deuxième partie

Rappels et compléments de cours

3 Rappels sur les réels

3.1 La valeur absolue

Pour tout couple x, y de réels on a $|-x| = |x|$, $|xy| = |x||y|$, $|x^n| = |x|^n$, $|x/y| = |x|/|y|$.

Inégalité triangulaire : pour tout couple x, y de réels on a : $|x + y| \leq |x| + |y|$; plus généralement :

$$\left| \sum_{k=0}^n x_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |x_k|.$$

Inégalité triangulaire renversée : pour tout couple x, y de réels on a : $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

3.2 Deux résultats utiles

Pour tout couple a, b de réels positifs on a :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Car $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. Et

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

4 Rappels sur les fonctions

Grosso-modo une fonction est un "moyen" d'associer à un nombre réel x quelconque (on dira que x est dans l'ensemble de départ) un autre nombre réel y de façon **unique** (on dira que y est dans l'ensemble de départ), on notera alors ce y par $f(x)$. L'élément $f(x)$ est appelé **image** de x par la fonction f , et x est lui appelé **antécédent** de $f(x)$. Il faut donc retenir que le principe de base d'une fonction c'est que pour chaque élément de l'ensemble de départ on lui associe une unique image dans l'ensemble d'arrivée.

Soyons maintenant un plus précis sur la notions de fonction : l'éventuel choix des ensembles de départs et d'arrivées sont fondamentaux ; en réalité il faut voir une fonction comme un triplet (c'est à dire la donnée de trois éléments) de la forme suivante :

$$(E, F, f)$$

où E est l'ensemble de départ de la fonction f , on l'appelle domaine de définition de la fonction f (donc E est un sous-ensemble de \mathbb{R} , on le note aussi \mathcal{D}_f) et F est l'ensemble d'arrivée de f (donc F est un sous-ensemble de \mathbb{R}). On note alors

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{cases} .$$

La flèche $\mathcal{D}_f \rightarrow F$ se lit "qui va de \mathcal{D}_f dans F " et la flèche $x \mapsto f(x)$ se lit "qui à tout x associe $f(x)$ ".

Remark. On peut toujours choisir de prendre pour F l'ensemble des réels tout entier. Ce qui est faux pour \mathcal{D}_f .

Example 4. La fonction "ln" : son domaine de définition usuel est bien sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ (ln n'est pas définie sur les nombres négatifs!!!) on peut donc écrire :

$$\ln : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{cases} .$$

Par contre l'écriture

$$\ln : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto \ln(x) \end{cases}$$

est fautive car même si l'ensemble de définition est correct, l'ensemble d'arrivée est mauvais car si on prend x entre 0 et 1 la fonction $\ln(x)$ est négative.

Regardons un autre exemple : la fonction exponentielle :

Example 5. La fonction "exp" : son domaine de définition usuel est \mathbb{R} tout entier, on écrit donc :

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases} .$$

Toujours sur ce même exemple on peut changer l'ensemble d'arrivée, en effet on sait que pour tout x réel $e^x > 0$ donc on pourrait écrire

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto e^x \end{cases} .$$

Les deux écritures sont correctes, mais la seconde donne plus de précisions sur l'ensemble d'arrivée.

4.1 Images directes et réciproques de fonctions

4.1.1 Images directes

Soit une fonction

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

et $A \subset \mathcal{D}_f$. On appelle **image directe** de l'ensemble A par f le sous-ensemble $f(A)$ de \mathbb{R} définie par :

$$f(A) := \{f(x) \text{ tel que } x \in A\}.$$

Autrement dit pour $y \in F$: **on a que** $y \in f(A)$ **si et seulement si il existe au moins un** x **dans** A **tel que** $y = f(x)$.

Exemple 6. Pour la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -2x + 1 \end{cases}$$

On va chercher $f([-1, 3])$, $f(]-1, 1])$ et $f(]-\infty, 0])$? La méthode la plus efficace pour ne pas se tromper consiste à faire un tableau de variations de la fonction f et de "lire" directement dedans (le faire). Ici on a une fonction strictement décroissante et comme $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$, $f(3) = -5$, $f(0) = 1$ et que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$ on en déduit que : $f([-1, 3]) = [-5, 3]$, $f(]-1, 1]) =]-1, 3[$ et $f(]-\infty, 0]) = [1, +\infty[$.

Autre exemple :

Exemple 7. La fonction "sinus" : son domaine de définition usuel est \mathbb{R} tout entier, et $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$, $\sin([0, \pi]) = [0, 1]$.

4.1.2 Images réciproques

Soit une fonction

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

et $B \subset \mathbb{R}$. On appelle **image réciproque** de l'ensemble B par f le sous-ensemble $f^{-1}(B)$ de \mathcal{D}_f définie par :

$$f^{-1}(B) := \{x \in \mathcal{D}_f \text{ tel que } f(x) \in B\}.$$

Autrement dit pour $x \in \mathcal{D}_f$: **on a que** $x \in f^{-1}(B)$ **si et seulement si** $f(x) \in B$.

Example 8. Pour la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -x + 7 \end{cases}$$

On va chercher $f^{-1}([-1, 1])$ et $f^{-1}(]-\infty, 0])$? La méthode la plus efficace pour ne pas se tromper consiste à faire un tableau de variations de la fonction f et de "lire" directement dedans, (le faire). Ici on a aussi une fonction strictement décroissante, on cherche tous les x réel tels que $f(x) \in [-1, 1]$ et on trouve alors que :

$$f^{-1}([-1, 1]) = [6, 8].$$

$$\text{et } f^{-1}(]-\infty, 0]) = [0, +\infty[.$$

4.2 La composition des fonctions

Voici une notion fondamentale : soit deux fonctions

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

et

$$g : \begin{cases} \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(x). \end{cases}$$

A partir de ces deux fonctions on peut (avec une hypothèse sur les ensembles de départ et d'arrivées) construire une nouvelle fonction qu'on appelle la composée de g et f .

Pour commencer on se place dans le cas simple où $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, on va définir dans ce contexte la nouvelle fonction, notée $g \circ f$ qui se lit "g rond f" définie par pour tout x réel par $(g \circ f)(x) := g(f(x))$. Autrement dit à tout x réel on lui associe le réel $g(f(x))$ (qui se calcule en appliquant d'abord f sur x , puis g sur le résultat de $f(x)$).

Example 9. Si $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$ (ici $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$) on a alors pour tout x réel que $(g \circ f)(x) := g(x^2) = x^2 + 1$. Notons bien que par contre pour tout x réel on a que $(f \circ g)(x) := f(x + 1) = (x + 1)^2 \neq (g \circ f)(x)$.

Revenons maintenant au cas plus général où $\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g$ ne sont pas égaux à \mathbb{R} tout entier. Le principe de définition est le même sauf qu'il faut être très prudent sur les ensembles de définitions : en effet l'existence de la nouvelle fonction $g \circ f$ dépend totalement du lien entre l'image directe de \mathcal{D}_f par f et \mathcal{D}_g . Pour que $g \circ f$ ait un sens il faut et il suffit que l'ensemble $f(\mathcal{D}_f)$ soit inclu

dans le domaine de définition de $g : \mathcal{D}_g$. Au final :

si $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ alors on peut définir la fonction $g \circ f$ par :

$$g \circ f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(f(x)). \end{cases}$$

De même si $g(\mathcal{D}_g) \subset \mathcal{D}_f$ alors on peut définir la fonction $f \circ g$ par :

$$f \circ g : \begin{cases} \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(g(x)). \end{cases}$$

Exemple 10. Soit $g = \ln$ donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$ et $f = \sin$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Ici on ne peut construire $g \circ f$, car la fonction f est à valeurs dans $[-1, 1]$ qui n'est pas inclus dans $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$!! Par contre on peut construire $f \circ g$ sans souci car $g(\mathcal{D}_g) = \mathbb{R} \subset \mathcal{D}_f$.

Si on veut construire $g \circ f$ on peut par exemple changer le domaine de définition de f pour en prendre un plus "petit" de sorte que son image soit incluse dans $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$; par exemple si on prend $\mathcal{D}_f =]0, \pi[$, on a $\sin(]0, \pi[) =]0, 1[$ et $]0, 1[\subset \mathcal{D}_g$ donc

$$g \circ f : \begin{cases}]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(\sin(x)) \end{cases}$$

existe bien !

Par contre si on prend encore $g = \ln$ donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = |\sin(x)| + 1$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Ici on peut construire $g \circ f$ sans problème car la fonction f est à valeurs dans $[1, 2]$ qui est bien inclus dans $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$.

A bien retenir : l'existence de $g \circ f$ dépend de conditions ensemblistes ! De plus même si $g \circ f$ et $f \circ g$ existent toutes deux, ces deux fonctions ne sont pas égales !!!

5 Limites de fonctions

5.1 Introduction

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction. Soit $a \in E$. Que signifie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$? Intuitivement, cela signifie que $f(x)$ devient proche de 0 dès que x est suffisamment proche de a .

Attention, la limite de f en a n'existe pas toujours. Par exemple, la fonction $x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0. Insistons sur le fait que la limite de f en a peut exister sans que a n'appartienne au domaine de définition de f . Ainsi, il a été vu au lycée que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

5.2 Opérations sur les limites

5.2.1 Somme

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$ (où x_0, ℓ et ℓ' sont finis ou non).

On a alors

	$\ell' \in \mathbb{R}$	$\ell' = +\infty$	$\ell' = -\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$?
$\ell = -\infty$	$-\infty$?	$-\infty$

Dans ce tableau, “?” signifie que l’on a une forme indéterminée. Attention, deux fonctions f et g peuvent ne pas avoir de limite en x_0 , alors que $f + g$ en a une en x_0 . On pourra, pour s’en convaincre, considérer le cas de $f(x) = \sin x$ et $g(x) = -\sin x$ en $x_0 = +\infty$. On verra dans la suite des méthodes pour lever des indéterminations.

5.2.2 Produit

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$ (où x_0, ℓ et ℓ' sont finis ou non).

On a alors

	$\ell' > 0$	$\ell' = 0$	$\ell' < 0$	$\ell' = +\infty$	$\ell' = -\infty$
$\ell > 0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = 0$	0	0	0	?	?
$\ell < 0$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell = +\infty$	$+\infty$?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell = -\infty$	$-\infty$?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Dans ce tableau, “?” signifie que l’on a une forme indéterminée. Attention, deux fonctions f et g peuvent ne pas avoir de limite en x_0 , alors que fg en a une en x_0 .

5.2.3 Inverse-Quotient

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ avec $\ell \neq 0$. Alors, $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de x_0 et $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$ (avec la convention $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$). Dans le cas où $\ell = 0$, on regarde la limite à droite et à gauche.

Exemple 11. Soit $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$. Si $x > 2$, $x^2 - 4 > 0$. Donc, $\lim_{x \rightarrow 2^+} = +\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow 2^+} = +\infty$.

De ceci et des règles sur le produit, on déduit aisément les règles sur le quotient.

5.2.4 Composition

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \rightarrow l} g(x) = \ell'$ (où x_0, ℓ et ℓ' sont finis ou non). Alors, $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$.

Exemple 12. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

5.2.5 Théorème d'encadrement

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions définies dans un voisinage I de x_0 et telles que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Alors, si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$. Comme précédemment, x_0 et ℓ sont finis ou infinis. Notons que si $\ell = +\infty$ (respectivement $\ell = -\infty$), nous pouvons conclure seulement grâce à l'inégalité de gauche (respectivement de droite).

(a) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$. Pour cela, notons que pour $x > 0$,

$$\frac{-1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. D'où, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0$.

(b) Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x . Rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x)$ est l'unique entier tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$. Nous en déduisons que pour $x > 0$, $E(x) \geq x - 1$. D'où, il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = +\infty$. Voir le paragraphe sur la continuité pour plus de détails sur la fonction "partie entière".

5.3 Calculs pratiques de limites

5.3.1 Quelques limites à connaître

Commençons par rappeler une liste de limites classiques (en 0) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Rappelons maintenant les principales règles sur les puissances comparées.

$$\text{Si } \alpha \text{ réel, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

De même, si α réel et si $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$.

En changeant x en $-x$, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha a^x = 0$.

Si α, β sont des réels strictement positifs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ et (en changeant x en $\frac{1}{x}$) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta (\ln x)^\alpha = 0$.

5.3.2 Exemples

Calculons $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ dans les cas suivants.

$$(a) x_0 = 0^+ \text{ et } f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}.$$

En utilisant la quantité conjuguée (cad : la formule suivante $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.)

on obtient, pour $x > 0$, $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}$. D'où, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

$$(b) x_0 = +\infty \text{ et } f(x) = \frac{e^{2x} - x^2}{4 \ln x + 5}.$$

L'idée est de mettre en haut et en bas le facteur "le plus grand" au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = \frac{e^{2x} \left(1 - \frac{x^2}{e^{2x}}\right)}{4 \ln x \left(1 + \frac{5}{4 \ln x}\right)}.$$

En utilisant les règles de croissance comparée, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{4 \ln x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{4 \ln x} = 0.$$

D'où, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

$$(c) x_0 = 0 \text{ et } f(x) = \frac{(1 - \cos 3x)(\sin 4x)}{x^3}.$$

Afin d'utiliser les limites classiques de la section précédente, écrivons

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \left(\frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2} \right) (3x)^2 \left(\frac{\sin 4x}{4x} \right) (4x) = 36 \left(\frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2} \right) \left(\frac{\sin 4x}{4x} \right).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{(3x)^2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1$, il vient $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 18$

5.4 Asymptotes

Nous allons dans ce paragraphe donner des interprétations graphiques de certaines limites. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +/ - \infty$, nous dirons que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f . Ce qui donne graphiquement Nous dirons que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$). En particulier, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe représentative au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Remarques.

- 1) La courbe représentative d'une fonction f n'a pas obligatoirement des asymptotes (verticales ou horizontales). Par exemple, considérer le cas de $f(x) = x^2$.
- 2) La courbe représentative d'une fonction f peut avoir des asymptotes différentes en $+\infty$ et $-\infty$. Par exemple, considérer le cas de $f(x) = |x|$. Les asymptotes au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ sont d'équation $y = x$ et $y = -x$ respectivement.

Exemple 13. Soit $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. Le lecteur pourra vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = 1$, puis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -1$. Donc, la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$. En fait, pour tout $x \neq -1$,

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x + 1}.$$

Si $x > -1$, $f(x) - (x - 1) = 4/(x + 1) > 0$, donc le graphe de f est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$. Le lecteur pourra vérifier que la même droite est aussi asymptote au voisinage de $-\infty$, mais qu'elle est alors au dessus du graphe de f . Ce qui donne

6 Dérivation des fonctions

6.1 Interprétation géométrique

On ne rentrera pas ici dans les détails théoriques, mais rappelons juste que pour une fonction

$$f : \begin{cases} \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

soit dérivable en un point $a \in \mathcal{D}_f$ il est nécessaire mais non suffisant que la fonction soit continue en a (géométriquement la continuité se traduit par le fait

qu'il n'y a pas de saut en a dans le graphique de la fonction f). La condition de dérivabilité d'une fonction en un point $a \in \mathcal{D}_f$ se traduit géométriquement par le fait qu'il n'y a pas de point anguleux en a ni de tangente verticale dans le graphique de la fonction f . L'exemple typique est la fonction valeur absolue :

$$|\cdot| : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$$

en 0 (faire dessin), cette fonction est continue en zéro mais pas dérivable (point anguleux).

Revenons au cas général, si f est dérivable en a alors l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est donnée par :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

6.2 Règles de calculs basiques

Voici les règles de bases du calcul de dérivée (ici α est constant).

fonction $f(x)$	\mathcal{D}_f	fonction dérivée $f'(x)$
α	\mathbb{R}	0
x^α	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	\mathbb{R}_+^*	e^x
$\ln(x)$	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin(x)$	\mathbb{R}	$\cos(x)$
$\cos(x)$	\mathbb{R}	$-\sin(x)$

6.3 Règles de calculs algébriques

Dans toutes la suite u et v sont des fonctions

$$(\alpha u)' = \alpha u',$$

$$(u + v)' = u' + v',$$

$$(uv)' = u'v + uv',$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u',$$

si v ne s'annule pas :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

si $u > 0$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u},$$

$$(e^u)' = u'e^u,$$

si $u \circ v$ existe :

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'.$$

Exemple 14. Calcul de la dérivée de la fonction $f(x) = e^{2x^3} + \sin\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)$. Donc pour tout x réel non nul on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^3)' e^{2x^3} + \sin'\left(\frac{2x-1}{x^2}\right) \times \left(\frac{2x-1}{x^2}\right)' \\ &= 6x^2 e^{2x^3} + \cos\left(\frac{2x-1}{x^2}\right) \times \left(\frac{2x^2 - (2x-1)2x}{x^4}\right) \\ &= 6x^2 e^{2x^3} + \cos\left(\frac{2x-1}{x^2}\right) \times \left(\frac{-2x+2}{x^3}\right). \end{aligned}$$

Un autre exemple :

Exemple 15. Calcul de la dérivée de la fonction $g(x) = (3x^2 + 12x + 4)^9 + \ln(x^6)$. Donc pour tout $x > 0$ on a :

$$g'(x) = 9(3x^2 + 12x + 4)^8 \times (6x + 12) + \frac{6x^5}{x^6}.$$

6.4 Dérivées et sens de variation

La principale utilisation des dérivées est de savoir quelle est le sens de variation d'une fonction. Pour cela on étudie le signe de la dérivée.

Exemple 16. Soit $f(x) = e^{2x} - x - 1$ définie sur \mathbb{R} .

Or f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x réel

$$f'(x) = 2e^{2x} - 1.$$

Donc

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ainsi pour tout $x \in]-\infty, \frac{1}{2} \ln(\frac{1}{2})[$ on a $f'(x) < 0$; pour tout $x \in]\frac{1}{2} \ln(\frac{1}{2}), +\infty[$ on a $f'(x) > 0$.

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{1}{2} \ln(\frac{1}{2})[$ et strictement croissante sur $]\frac{1}{2} \ln(\frac{1}{2}), +\infty[$, autrement dit la fonction f admet un minimum en $x = \frac{1}{2} \ln(\frac{1}{2})$ qui vaut $f\left(\frac{1}{2} \ln(\frac{1}{2})\right)$. Faire le tableau.

7 Primitives de fonctions

Dans cette section on s'intéresse à l'opération "symétrique" de la dérivation c'est le calcul de primitives. On ne rentrera pas non plus ici dans les détails théoriques. Soit une fonction

$$f : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

et une autre fonction

$$F : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x) \end{cases}$$

on dira que la fonction F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable sur I et $F' = f$. Notons bien que les primitives ne sont pas uniques !!

Example 17. Donner une primitive de la fonction $f(x) = 2x + 1$ sur \mathbb{R} . Il est clair que la fonction $F(x) = x^2 + x$ convient, $F(x) = x^2 + x + 34$ aussi !

Notation : si u est une fonction (continue), on notera par U ou $\int u$ ou encore une $\int u(x) dx$ une de ses primitives. Attention : ne pas faire un "mix" des deux notations, du genre $\int x$ ou $\int f dx$...

7.1 Primitives de base

fonction	primitives	domaine de définition
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	\mathbb{R} et $(e^x)' = e^x$
$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}^*
$x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	\mathbb{R}_+^*
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x $	\mathbb{R}^*
$x \mapsto a^x$ où $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$	$x \mapsto \frac{a^x}{\ln(a)}$	\mathbb{R}
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	\mathbb{R}
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	\mathbb{R}
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln \cos(x) $	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$

7.2 Règles de calcul des primitives

Ici u et v sont des fonctions.

fonctions du type	primitives
$u'u^n$ où $n \geq 0$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
$u'e^u$	e^u

Exemple 18. Primitives de $x \mapsto \frac{x}{(3+12x^2)^{38}}$. Ici on "sent" bien qu'il faut utiliser la troisième formule, il faut juste "arranger" un peu la fonction pour avoir vraiment la forme $\frac{u'}{u^n}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(3+12x^2)^{38}} dx &= \frac{1}{24} \int \frac{24x}{(3+12x^2)^{38}} dx \\ &= \frac{1}{24} \frac{-1}{37(3+12x^2)^{37}} = \frac{-1}{888(3+12x^2)^{37}}. \end{aligned}$$

Si on choisit de prendre u et v de manière différente, on va se retrouver avec une primitive plus compliquée à calculer !! alors que le principe de l'intégration par parties est de simplifier ce calcul !

7.3 Intégration par parties (version primitives)

Ici u et v sont des fonctions et U est une primitive de u (ie : $U = \int u$). La formule d'intégration par parties (version primitives) est :

$$\int (uv) = Uv - \int (Uv').$$

Il faut faire le bon choix de u et de v !

Exemple 19. Primitives de $x \mapsto xe^{-2x}$. Ici on prendra $u(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = x$; on a donc que

$$\begin{aligned} \int xe^{-2x} dx &= \frac{e^{-2x}}{-2} x - \int \left(\frac{e^{-2x}}{-2} \cdot 1 \right) dx \\ &= \frac{-e^{-2x}}{2} x + \frac{1}{2} \int (e^{-2x}) dx \\ &= \frac{-e^{-2x}}{2} x - \frac{1}{4} e^{-2x}. \end{aligned}$$

Si on choisit de prendre u et v de manière différente, on va se retrouver avec une primitives plus compliquée à calculer !! alors que le principe de l'intégration par parties est de simplifier ce calcul !

8 Le symbole " \sum " somme en pratique

8.1 Définition

Pour une suite $(u_k)_k$ de nombres réels ou complexes et pour n et m deux entiers avec $n \leq m$ on pose :

$$\sum_{k=n}^m u_k := u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{m-1} + u_m.$$

Il faut bien comprendre que k est ici une **variable dite muette** (ie : elle ne sert que de compteur, peut importe son nom...), donc

$$\sum_{k=n}^m u_k = \sum_{j=n}^m u_j = \sum_{\heartsuit=n}^m u_{\heartsuit} \dots$$

Pour savoir combien de terme contient une somme il suffit de les compter : **nombre de terme=(indice final-premier indice)+1**. Par exemple la somme précédente contient $m - n + 1$ termes.

8.2 Propriétés de base

On a pour α une constante :

$$\sum_{k=n}^m \alpha = (m - n + 1)\alpha;$$

si α, β sont des constantes et $(u_k)_k, (v_k)_k$ deux suites :

$$\sum_{k=n}^m (\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha \sum_{k=n}^m u_k + \beta \sum_{k=n}^m v_k.$$

Par contre

$$\sum_{k=n}^m (u_k v_k) \neq \left(\sum_{k=n}^m u_k \right) \left(\sum_{k=n}^m v_k \right).$$

Si on a trois suites réelles $(u_k)_k, (v_k)_k, (w_k)_k$ telles que $\forall k, u_k \leq v_k \leq w_k$ alors on a :

$$\sum_{k=n}^m u_k \leq \sum_{k=n}^m v_k \leq \sum_{k=n}^m w_k.$$

Enfin si on a trois entiers n, m et p avec $n \leq p \leq m$ on a :

$$\sum_{k=n}^m u_k = \sum_{k=n}^{p-1} u_k + u_p + \sum_{k=p+1}^m u_k;$$

ou bien encore

$$\sum_{k=n}^m u_k = \sum_{k=n}^{p-1} u_k + \sum_{k=p}^m u_k;$$

etc ...

8.3 Changement d'indice

Le changement d'indice consiste juste à changer la variable muette, souvent on la décale d'un cran ...Par exemple :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^m u_k &= u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{m-1} + u_m. \\ &= \sum_{k=n-1}^{m-1} u_{k+1}\end{aligned}$$

ou encore

$$\sum_{k=n}^m u_k = \sum_{k=n+1}^{m+1} u_{k-1}.$$

Ou bien encore pour un entier ℓ fixé

$$\sum_{k=n}^m u_k = \sum_{k=n-\ell}^{m-\ell} u_{k+\ell}.$$

8.4 Quelques sommes à connaitre

Si $(u_k)_k$ est **une suite arithmétique** : (rappel : une suite $(u_k)_k$ est arithmétique si et seulement si pour tout indice k la différence $u_{k+1} - u_k$ est constante, terme nommé raison.)

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^m u_k &= \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de termes}) \\ &= \frac{(u_n + u_m)}{2} (m - n + 1).\end{aligned}$$

Exemple 20. Exemple : avec la suite $u_k = k$, on a pour tout indice k que $u_{k+1} - u_k = 1$.

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Si $(u_k)_k$ est **une suite géométrique de raison $r \neq 1$** : (rappel : une suite $(u_k)_k$ est géométrique si et seulement si pour tout indice k le rapport u_{k+1}/u_k est constant, terme nommé raison.)

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^m u_k &= (\text{premier terme}) \times \frac{(1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}})}{1 - \text{raison}} \\ &= u_n \frac{(1 - r^{m-n+1})}{1 - r}.\end{aligned}$$

Exemple 21. Exemple : pour $q \neq 1$ fixé, avec la suite $u_k = q^k$, on a pour tout indice k que $u_{k+1}/u_k = q$.

$$\sum_{k=1}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

9 Recueils d'exercices et problèmes

9.1 Exercice 1.

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 (4x - 1)e^{3x} dx$.

CORRECTION : En intégrant par parties on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (4x - 1)e^{3x} dx &= \left[\frac{e^{3x}}{3} (4x - 1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{3x}}{3} 4 dx \\ &= e^3 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \left[\frac{e^{3x}}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{5}{9}e^3 + \frac{7}{9} \end{aligned}$$

2. $\int_0^\pi (2x - 1) \cos(3x) dx$.

CORRECTION :

En intégrant par parties on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (2x - 1) \cos(3x) dx &= \left[\frac{\sin(3x)}{3} (2x - 1) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(3x)}{3} 2 dx \\ &= -\frac{2}{3} \left[-\frac{\cos(3x)}{3} \right]_0^\pi \\ &= -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

3. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$.

CORRECTION :

En intégrant par parties on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= \left[-e^{-x} x^2 \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} 2x dx \\ &= -e^{-1} + 2 \int_0^1 e^{-x} x dx \end{aligned}$$

En intégrant par parties à nouveau l'intégrale de droite de la précédente égalité nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x} x dx &= [e^{-x} x]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 \\ &= -2e^{-1} + 1\end{aligned}$$

Donc au final, on arrive au fait que

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -5e^{-1} + 2$$

9.2 Exercice 2

On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormée (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x + 3}$$

On notera \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .

1. Donner Δ le domaine de définition maximum de la fonction f .
2. Donner les limites de f sur les extrémités de Δ , en déduire des asymptotes de \mathcal{C}_f .

CORRECTION :

On a

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x + 3}$$

1. La fonction f est clairement (en tant que fraction rationnelle) définie sur toute la droite réelle, sauf en -3 , donc $\Delta =]-\infty, -3[\cup]-3, \infty[$.
2. On va donc étudier les limites de f en $-\infty$, en -3 à droite et gauche, et en $+\infty$.

Or déjà, $\forall x \in \Delta$

$$f(x) = \frac{x(2x + \frac{1}{x})}{x(1 + \frac{3}{x})} = \frac{(2x + \frac{1}{x})}{(1 + \frac{3}{x})}$$

ainsi comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{3}{x}) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \frac{1}{x}) = -\infty$, on a par quotient que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

de même on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Ensuite, $\lim_{x \rightarrow -3^-} 2x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -3^+} 2x^2 + 1 = 19$ et donc :

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$$

ainsi graphiquement la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à \mathcal{C}_f en + et - l'infini.

9.3 Problème 1

Partie 1

Soit f et g les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = \frac{2x}{x+2}$. On notera par C la courbe représentative de la fonction f et par Γ celle de g . Soit h la fonction définie $[0, +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Etudier le sens de variation de h sur $[0, +\infty[$; calculer $h(0)$. (L'étude de la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).
2. En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$\frac{2x}{x+2} \leq \ln(1+x).$$

3. Construire les courbes C et Γ et montrer qu'elles admettent en 0 une même tangente que l'on précisera.

Partie 2

Soit $k > 0$ et soit la fonction f_k définie sur $[0, +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction f_1 .
2. Etudier la limite de la fonction f_1 en $+\infty$ et donner la valeur de la fonction f_1 en 0.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$\ln(1+x) \leq x.$$

4. En déduire que si $k \geq 1$, alors : pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) \leq kx$.

Partie 3

1. Avec une intégration par parties calculer

$$I = \int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

(On pourra remarquer que $\frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$.)

CORRECTION :

Partie 1

1. La fonction h est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme, fractions et composée de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1+x} - \frac{2(x+2) - 2x \cdot 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+2)^2(x+1)} - \frac{-4x - 4}{(x+2)^2(x+1)} \\ &= \frac{x^2}{(x+2)^2(x+1)}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $x > 0$ on a $h'(x) > 0$ et $h'(0) = 0$. Ainsi la fonction est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ avec $h(0) = 0$. (Faire le tableau de variation).

2. Avec la question précédente, comme h est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ avec $h(0) = 0$ on en déduit que $x \geq 0$ on a $h(x) \geq 0$, ie : $f(x) \geq g(x)$ et donc

$$\frac{2x}{x+2} \leq \ln(1+x).$$

3. L'équation de la tangente à C en 0 a pour équation : $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$; or, pour tout $x \geq 0$ $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, donc l'équation est :

$$y = x.$$

L'équation de la tangente à Γ en 0 a pour équation : $y = g(0) + g'(0)(x - 0)$; or, pour tout $x \geq 0$ $g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$, donc l'équation est :

$$y = x.$$

La tangente est donc commune aux deux courbes.

Partie 2

1. La fonction f_1 est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme, fractions et composée de fonctions dérivables. Et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1 - (1+x)}{1+x} \\ &= \frac{-x}{1+x}. \end{aligned}$$

Donc pour $x > 0$ on a $f_1'(x) < 0$ et en $x = 0$ on a $f_1'(0) = 0$. Ainsi, la fonction f_1 est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. (Faire le tableau)

2. Or pour $x > 0$ on a $f_1(x) = \ln(1+x) - x = x \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right)$ et comme $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = -\infty.$$

Et on a $f_1(0) = 0$.

3. Avec la question précédente, comme f_1 est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ avec $f_1(0) = 0$ on en déduit que $x \geq 0$ on a $f_1(x) \leq 0$, ie :

$$\ln(1+x) \leq x.$$

4. Si $k \geq 1$, alors : pour tout $x \in [0, +\infty[$, $x \leq kx$ et donc avec la question précédente, on a que pour tout $x \geq 0$

$$\ln(1+x) \leq kx.$$

Partie 3

1. Avec une intégration par parties on a : (ici $u = 1$ et $v = \ln(1+x)$ donc $U = x$ et $v' = \frac{1}{1+x}$)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x) dx &= \int_0^1 1 \cdot \ln(1+x) dx \\ &= [x \cdot \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 x \frac{1}{1+x} dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx. \end{aligned}$$

On note que

$$\frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [x]_0^1 - [\ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln(2);$$

donc

$$I = 2\ln(2) - 1.$$

9.4 Problème 2

Pour $x > 1$, on pose $f(x) := (\ln(\ln x))^2$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$. Déterminer les variations de f . Déterminer les limites de f en 1 et en $+\infty$.
2. Déterminer $f([2; 9[)$, $f(]e, +\infty[)$, $f^{-1}(]4, +\infty[)$.

CORRECTION :

Pour $x > 1$, on pose $f(x) = (\ln(\ln x))^2$.

1. La fonction f est dérivable comme composée de fonctions dérivables ($x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x^2$). On a $f'(x) = 2 \frac{1}{x \ln x} \ln(\ln x)$. On en déduit que $f'(e) = 0$, que $f' > 0$ sur $]e, +\infty[$ et que $f' < 0$ sur $]1, e[$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]1, e[$ et strictement croissante sur $]e, +\infty[$.

Par composition de limites, on a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que $f([2; 9[)$ et $f(]e, +\infty[)$ sont des intervalles et le graphe ci-dessus donne de suite

$$f([2; 9[) = [0, f(9)[\text{ et } f(]e, +\infty[) =]0, +\infty[.$$

L'équation $f(x) = 4$ possède deux solutions : l'une $x_1 = e^{e^{-2}} \in]1, e[$, l'autre $x_2 = e^{e^2} \in]e, +\infty[$. Les variations de f montrent alors que $f^{-1}(]4, +\infty[) =]1, x_1[\cup]x_2, +\infty[$.

9.5 Problème 3

Soit f la fonction définie pour tout x réel strictement positif par

$$f(x) := x - \ln(x).$$

1. Déterminer pour tout x réel strictement positif, l'expression de $f'(x)$ la dérivée de f .
2. Quelle est la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$?
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

4. Donner le tableau de variation de f en précisant bien les limites aux bornes.
5. En déduire le signe de f .
6. Déterminer pour tout x réel strictement positif, l'expression de $f''(x)$ la dérivée seconde de f .
7. Etudier les variations de f' .
8. Etablir pour tout réel x de $[1, 2]$ que

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

CORRECTION :

1. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout x réel strictement positif $f'(x) = \frac{x-1}{x}$.
2. Par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
3. Ainsi, comme pour tout x réel strictement positif $f(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$ on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
4. Or avec la question 1 on a que la fonction f admet un minimum en $x = 1$, ce minimum vaut $f(1) = 1$, de plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
5. On en déduit sans peine que la fonction f est strictement positive sur $]0, +\infty[$.
6. La fonction f' est elle aussi dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout x réel strictement positif $f''(x) = \frac{1}{x^2}$.
7. On en déduit que la fonction f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
8. En particulier, f' est strictement croissante sur $[1, 2]$, et donc pour tout réel x de $[1, 2]$ on a

$$f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2)$$

avec $f'(1) = 0$ et $f'(2) = \frac{1}{2}$; ainsi pour tout réel x de $[1, 2]$ nous obtenons que

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$