

Fractions

Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.



Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

- | | | | |
|-------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $\frac{32}{40}$ | <input type="text"/> | c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ | <input type="text"/> |
| b) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$ | <input type="text"/> | d) $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

- | | | | |
|--------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$ | <input type="text"/> | c) $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$ | <input type="text"/> |
| b) $\frac{2}{3} - 0,2$ | <input type="text"/> | d) $-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5})$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})$ | <input type="text"/> |
| b) $(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}) \times \frac{21}{24}$ | <input type="text"/> |
| c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ | <input type="text"/> |
| d) $\frac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 980 \times 21 + 1958}{1\ 980 \times 1\ 979 - 1\ 978 \times 1\ 979}$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.4 — Un petit calcul.



Écrire $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$ sous forme d'une fraction irréductible.

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $\frac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)}$ | <input type="text"/> | c) $\frac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235}$ | <input type="text"/> |
| b) $\frac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2}$ | <input type="text"/> | d) $\frac{4\ 002}{1\ 000 \times 1\ 002 - 999 \times 1\ 001}$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a) $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- b) $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, distincts deux à deux.
- c) $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.



Simplifier $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.



Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \frac{b}{c}$ avec $b < c$.

- a) $\frac{29}{6}$ b) $\frac{k}{k-1}$ c) $\frac{3x-1}{x-2}$..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.



Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible.

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a) $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$ b) $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$ c) $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$

Calcul 1.11 — Produit en croix.



Les nombres $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux? Oui ou non?

Calcul 1.12 — Produit en croix.



On pose $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$?

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ <input type="text"/>	c) $\frac{10^5}{10^3}$ <input type="text"/>	e) $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ <input type="text"/>
b) $(10^5)^3$ <input type="text"/>	d) $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$ <input type="text"/>	f) $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ <input type="text"/>

Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ <input type="text"/>	c) $\frac{2^5}{2^{-2}}$ <input type="text"/>	e) $\frac{6^5}{2^5}$ <input type="text"/>
b) $(5^3)^{-2}$ <input type="text"/>	d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ <input type="text"/>	f) $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ <input type="text"/>

Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ <input type="text"/>	c) $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ <input type="text"/>
b) $2^{21} + 2^{22}$ <input type="text"/>	d) $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$ <input type="text"/>

Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ <input type="text"/>	c) $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ <input type="text"/>
b) $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ <input type="text"/>	d) $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ <input type="text"/>

Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x .

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$ <input type="text"/>	c) $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$ <input type="text"/>
b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$ <input type="text"/>	d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$ <input type="text"/>

Calcul littéral

Prérequis

Les identités remarquables!

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x .

a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$

d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$

b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$

e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$

c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$

f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x .

a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$

b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$

c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1) + 1\right)x - x^6 - x^5 + 2$

d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)$

e) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(1 - \sqrt{2}x + x^2)$

f) $(x^2 + x + 1)^2$

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$

b) $25 - (10x+3)^2$

c) $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$

d) $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$

Expressions algébriques

Prérequis

Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a + 2)^3$

c) a^{12}

b) $a^5 - a^6$

d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $i^2 = -1$.Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + iy$ où x, y sont deux réels.

a) $(3 + i)^2$

c) $(3 - i)^3$

b) $(3 - i)^2$

d) $(3 - 2i)^3$

Calcul 5.3



Même exercice.

a) $(4 - 5i)(6 + 3i)$

c) $(-4 + i\sqrt{5})^3$

b) $(2 + 3i)^3(2 - 3i)^3$

d) $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$

c) $\prod_{k=0}^{1234} a^k$

d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$

e) $\sum_{k=1}^{99} a^k$

f) $\prod_{k=0}^4 (2 - a^k)$

Équations du second degré

Prérequis

Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes. ●●●●●

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

- | | |
|--|--|
| a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | f) $2x^2 + 3x = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | g) $2x^2 + 3 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| e) $x^2 - 5x = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |

Calcul 6.2 — Somme et produit. ●●●●●

Résoudre mentalement les équations suivantes.

- | | |
|---|--|
| a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |
| c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> | f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ <input style="width: 80px; height: 25px;" type="text"/> |

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre. ●●●●●

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

- | | |
|---|---|
| a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |
| b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |
| c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |
| d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine | <input style="width: 100%; height: 25px;" type="text"/> |

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.



Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x .

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$

d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.



Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$

b) $-x^2 + 2x + 15$

c) $(x + 1)(3x - 2)$

d) $\frac{x - 4}{2x + 1}$

Exponentielles

Calcul 7.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3 \ln 2}$

d) $e^{-2 \ln 3}$

b) $\ln(\sqrt{e})$

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$

f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$

Calcul 7.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$

d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

b) $e^{-\ln \ln 2}$

e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$

c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$

f) $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021 + x}{2021 - x}$

b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Calcul 7.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|----------------------|
| a) $f(2e^x - 1)$ | <input type="text"/> | d) $xf'(x) - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ | <input type="text"/> | e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ | <input type="text"/> | | |

Équations, inéquations

Calcul 7.10



Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

- | | |
|---|----------------------|
| a) $e^{3x-5} \geq 12$ | <input type="text"/> |
| b) $1 \leq e^{-x^2+x}$ | <input type="text"/> |
| c) $e^{1+\ln x} \geq 2$ | <input type="text"/> |
| d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$ | <input type="text"/> |
| e) $\ln(-x - 5) = \ln(x - 61) - \ln(x + 7)$ | <input type="text"/> |
| f) $\ln(-x - 5) = \ln \frac{x - 61}{x + 7}$ | <input type="text"/> |

Trigonométrie

Prérequis

Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1



Simplifier :

a) $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$.

c) $\tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{3\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{6}$

b) $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6}$

d) $\cos^2 \frac{4\pi}{3} - \sin^2 \frac{4\pi}{3}$

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.2



Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$

Formules d'addition

Calcul 8.3



Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos \frac{5\pi}{12}$ (on a $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$)

c) $\sin \frac{\pi}{12}$

b) $\cos \frac{\pi}{12}$

d) $\tan \frac{\pi}{12}$

Calcul 8.4



a) Simplifier : $\sin(4x) \cos(5x) - \sin(5x) \cos(4x)$

b) Simplifier : $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

c) Simplifier : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

d) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$

Formules de duplication

Calcul 8.5



En remarquant qu'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos \frac{\pi}{8}$

b) $\sin \frac{\pi}{8}$

Calcul 8.6



a) Simplifier : $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$ (avec $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Simplifier : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

c) Expliciter $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$

Équations trigonométriques

Calcul 8.7



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

f) $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$

h) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

d) $\tan x = -1$

i) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$

e) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

j) $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$

Inéquations trigonométriques

Calcul 8.8



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\tan x \geq 1$

b) $\cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$

f) $|\tan x| \geq 1$

c) $\sin x \leq \frac{1}{2}$

g) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

d) $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$

h) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$

Calcul 9.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a).....	$\frac{4}{5}$	1.3 c).....	$\frac{-10}{3}$	1.7.....	$\frac{n^3 + n}{n + 1}$
1.1 b).....	2^5	1.3 d).....	1 000	1.8 a).....	$4 + \frac{5}{6}$
1.1 c).....	3	1.4.....	$\frac{16}{35}$	1.8 b).....	$1 + \frac{1}{k - 1}$
1.1 d).....	$-2 \times 3^{3k-2}$	1.5 a).....	2 022	1.8 c).....	$3 + \frac{5}{x - 2}$
1.2 a).....	$\frac{1}{6}$	1.5 b).....	$\frac{1}{2}$	1.9.....	$2t$
1.2 b).....	$\frac{7}{15}$	1.5 c).....	1	1.10 a).....	$\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$
1.2 c).....	9	1.5 d).....	2	1.10 b).....	$\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$
1.2 d).....	$\frac{1}{9}$	1.6 a).....	$\frac{-1}{n(n+1)^2}$	1.10 c).....	$\frac{125}{25} = \frac{105}{21}$
1.3 a).....	247	1.6 b).....	$-\frac{ab}{a-b}$	1.11.....	Non
1.3 b).....	$\frac{203}{24}$	1.6 c).....	$\frac{3}{2}n$	1.12.....	$A > B$

Corrigés

1.1 a) $\frac{32}{40} = \frac{8 \times 4}{8 \times 5} = \frac{4}{5}$

1.1 b) $8^3 \times \frac{1}{4^2} = (2 \times 4)^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5$

1.1 c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{3^4}{3^3} = 3$

1.1 d) On a : $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}} = \frac{(-2) \times (-2)^{2k} \times 3^{2k} \times 3^{-1}}{4^k \times 3^{-k} \times 3} = \frac{(-2) \times 4^k \times 3^{2k} \times 3^k}{4^k \times 3^2} = -2 \times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} - \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} = \frac{6-4}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} - 0,2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} - \frac{2 \times 3}{10 \times 3} = \frac{20}{30} - \frac{6}{30} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7 \times 2}{15 \times 2} = \frac{7}{15}$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5 = \frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times \frac{5}{1} = \frac{36 \times 15 \times 5}{25 \times 12 \times 1} = \frac{12 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5}{5 \times 5 \times 12 \times 1} = \frac{3 \times 3}{1} = \frac{9}{1} = 9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{2}{15} \times \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{2}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{15 \times 6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{9}$$

.....
1.3 a) On développe :

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{5} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{7}$$
$$= 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 5 \times 7 + 2 \times 3 \times 7 + 2 \times 3 \times 5 = 105 + 70 + 42 + 30 = 247.$$

.....

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \times \frac{21}{24} = \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{31}{5} \right) \times \frac{7}{8}$$
$$= \left(\frac{136}{15} + \frac{3}{5} \right) \times \frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15} + \frac{9}{15} \right) \times \frac{7}{8} = \frac{145}{15} \times \frac{7}{8} = \frac{29}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{203}{24}.$$

.....

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} = \frac{5^{10} \times 7^3 - 5^{10} \times 7^4}{5^9 \times 7^3 + 5^9 \times 7^3 \times 2^3} = \frac{5^{10} \times 7^3 (1 - 7)}{5^9 \times 7^3 (1 + 2^3)} = \frac{5 \times (-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

.....

1.3 d) On calcule :

$$\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1\,958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979} = \frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,979 \times 21 + 21 + 1\,958}{1\,979 \times (1\,980 - 1\,978)}$$
$$= \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21) + 1\,979}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times (1\,978 + 21 + 1)}{1\,979 \times 2} = \frac{1\,979 \times 2\,000}{1\,979 \times 2}$$
$$= 1\,000.$$

.....

1.4 On calcule :

$$\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5} = \frac{\frac{3}{6} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}}$$
$$= \frac{3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37} \right)}{5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37} \right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{-7 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.$$

.....

1.5 a) On connaît l'identité remarquable : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

$$\text{Donc : } \frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)} = \frac{2\,022}{(2\,022)^2 + (1 - 2\,022) \times (1 + 2\,022)} = \frac{2\,022}{(2\,022)^2 + 1 - 2\,022^2} = 2\,022.$$

.....

1.5 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2} = \frac{2\,021^2}{(2\,021 - 1)^2 + (2\,021 + 1)^2 - 2}$$
$$= \frac{2\,021^2}{2\,021^2 - 2 \times 2\,021 \times 1 + 1 + 1 + 2\,021^2 + 2 \times 2\,021 \times 1 + 1 - 2}$$
$$= \frac{2\,021^2}{2\,021^2 - 2 \times 2\,021 \times 1 + 2\,021^2 + 2 \times 2\,021 \times 1} = \frac{2\,021}{2\,021 - 2 + 2\,021 + 2} = \frac{1}{2}.$$

.....

1.5 c) En posant $a = 1\,234$, on a : $1\,235 = a + 1$ et $2\,469 = 2a + 1$.

$$\text{Donc : } \frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235} = \frac{(a + 1)(2a + 1) - a}{a(2a + 1) + a + 1} = \frac{2a^2 + 2a + 1}{2a^2 + 2a + 1} = 1.$$

.....

1.5 d) En posant $a = 1\,000$, on a : $999 = a - 1$, $1\,001 = a + 1$, $1\,002 = a + 2$ et $4\,002 = 4a + 2$.

$$\text{Donc : } \frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001} = \frac{4a + 2}{a(a + 2) - (a - 1)(a + 1)} = \frac{2(2a + 1)}{a^2 + 2a - (a^2 - 1)} = \frac{2(2a + 1)}{2a + 1} = 2.$$

.....

1.6 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}$$

$$= \frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}.$$

1.6 b) On rappelle la formule : $a^3 - b^3 = (a-b)(ab + a^2 + b^2)$. Cela donne :

$$\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{(a-b)(ab + a^2 + b^2)}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{ab + a^2 + b^2}{a-b} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a-b} = -\frac{ab}{a-b}.$$

1.6 c) Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a :

$$\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \frac{6(n+1)}{2(n-1)} \times \frac{n(n-1)}{2(n+1)} = \frac{3}{2}n.$$

1.7 De $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, on a : $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k} = \frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n(n^2+1)}{n+1} = \frac{n^3+n}{n+1}$.

1.8 a) On trouve $\frac{29}{6} = \frac{4 \times 6 + 5}{6} = 4 + \frac{5}{6}$.

1.8 b) On trouve $\frac{k}{k-1} = \frac{k-1+1}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1}$.

1.8 c) On trouve $\frac{3x-1}{x-2} = \frac{3(x-2)+5}{x-2} = 3 + \frac{5}{x-2}$.

1.9 Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

$$A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(1+t^2)}{(1+t^2)(1+t)^2} - \frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{1+2t+t^2 - (1+t^2)}{(1+t^2)(1+t)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB = \left(\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2} \right) \times (1+t^2)(1+t)^2 = 2t$.

1.10 a) $\frac{3}{5} = \frac{27}{45} > \frac{5}{9} = \frac{25}{45}$

1.10 c) $\frac{125}{25} = 5 = \frac{105}{21}$

1.11 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A = B$, si et seulement si $33\,215 \times 208\,341 = 66\,317 \times 104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impairs, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

1.12 On ré-écrit $A = \frac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B = \frac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1) \times (10^7+1) = 10^{12} + 10^7 + 10^5 + 1$.

D'autre part : $(10^6+1)^2 = 10^{12} + 2 \times 10^6 + 1$.

Comme $(10^5+1) \times (10^7+1) > (10^6+1) \times (10^6+1)$, on obtient : $A > B$.

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a).....	10^8	2.2 b).....	5^{-6}	2.3 b).....	$2^{21} \cdot 3$	2.5 a).....	$\frac{x}{x+1}$
2.1 b).....	10^{15}	2.2 c).....	2^7	2.3 c).....	2	2.5 b).....	$\frac{1}{x-2}$
2.1 c).....	10^2	2.2 d).....	$(-7)^{-2}$	2.3 d).....	$2^{38} \cdot 3^{26}$	2.5 c).....	$\frac{2x}{x+1}$
2.1 d).....	10^{-2}	2.2 e).....	3^5	2.4 a).....	8	2.5 d).....	$\frac{2}{x-2}$
2.1 e).....	10^4	2.2 f).....	3^{28}	2.4 b).....	11		
2.1 f).....	10^{-8}	2.3 a).....	$2^{-4} \cdot 3^{-1}$	2.4 c).....	3^{10}		
2.2 a).....	15^4			2.4 d).....	$2^6 \cdot 5$		

Corrigés

2.3 a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 2^{-1} \cdot 3^{-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^{4-1} \cdot 2^{8-1}} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^7} = 2^{3-7} \cdot 3^{2-3} = 2^{-4} \cdot 3^{-1}$.

2.3 b) On factorise : $2^{21} + 2^{22} = 2^{21} + 2^{21} \cdot 2 = 2^{21} \cdot (1 + 2) = 2^{21} \cdot 3$.

2.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}} = \frac{(3 + 1) \cdot 3^{21}}{(3 - 1) \cdot 3^{21}} = \frac{4}{2} = 2$.

2.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}} = \frac{3^{16} \cdot 2^{32}}{3^{-10} \cdot 2^{-6}} = 2^{38} \cdot 3^{26}$.

2.4 a) On fait apparaître les facteurs premiers 2 et 3 : $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{3 \cdot 17} \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-6}}{3^{2 \cdot (-3)} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{51-6} \cdot 3^{-6}}{3^{-6} \cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8$.

2.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4} = \frac{(5 \cdot 11)^2 \cdot (11^2)^{-2} \cdot (5^3)^2}{5^2 \cdot 11 \cdot (11^2 \cdot 5)^{-2} \cdot (5^2)^4} = \frac{5^8 \cdot 11^{-2}}{5^8 \cdot 11^{-3}} = 11$.

2.4 c) On fait apparaître les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}} = \frac{(2^2)^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 5^4}{(5^2)^2 \cdot 2^{-4} \cdot (3^2)^{-4}} = \frac{2^{-4} \cdot 3^2 \cdot 5^4}{2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 5^4} = 3^{10}$.

2.4 d) Même méthode que précédemment : $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6} = \frac{2^6 \cdot 3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 7^5 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 7^3 \cdot 2^4 \cdot 7^2 \cdot 3^6 \cdot 5^6} = \frac{2^{13} \cdot 3^6 \cdot 5^7 \cdot 7^5}{2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^5} = 2^6 \cdot 5$.

2.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}$

2.5 b) Même méthode : $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4} = \frac{2(x-2) - (x+2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{8}{(x+2)(x-2)} = \frac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

2.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x} = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x} = \frac{1}{x} + \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{x-2+x}{x(x-2)} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{2}{x-2}$

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) $8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$

3.1 b) $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$

3.1 c) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$

3.1 d) $x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$

3.1 e) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$

3.1 f) $x^4 + x^2 + 1$

3.2 a) $-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4$

3.2 b) $-28 + 21x$

3.2 c) $2 + x^3 - x^4 - x^5$

3.2 d) $-1 - 3x - 3x^2 + x^3$

3.2 e) $1 + x^4$

3.2 f) $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$

3.3 a) $-6(6x + 7)$

3.3 b) $4(5x + 4)(-5x + 1)$

3.3 c) $2(3x - 4)(10x + 3)$

3.3 d) $-8(x + 1)(x + 16)$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

3.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3(x^2 + x + 1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)(x^2 + x + 1) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ et $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)(x^2 - x + 1) = [(x + 1)(x - 1)][(x + 1)(x^2 - x + 1)] = (x^2 - 1)(x^3 + 1) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

3.1 d) On calcule : $(x + 1)^2(x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + 2x + 1)(x^3 - 1) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

3.1 e) On calcule : $(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 - 1)(x^3 - 1) = x^5 - x^3 - x^2 + 1$.

.....

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x + 7$. On calcule alors

$$-(6x + 7)(6x - 1) + 36x^2 - 49 = -(6x + 7)(6x - 1) + (6x)^2 - 7^2 = (6x + 7)[-(6x - 1) + 6x - 7] = -6(6x + 7).$$

.....

3.3 b) On calcule $25 - (10x + 3)^2 = 5^2 - (10x + 3)^2 = (10x + 8)(-10x + 2) = 4(5x + 4)(-5x + 1)$.

.....

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

- 5.1 a) $7a^2 + 12a + 7$ 5.3 c) $-4 + 43i\sqrt{5}$
 5.1 b) $a^2 - 1$ 5.3 d) 1
 5.1 c) $4a^2 - a - 3$ 5.4 a) 3
 5.1 d) $-a^2 + 1$ 5.4 b) 1
 5.2 a) $8 + 6i$ 5.4 c) 1
 5.2 b) $8 - 6i$ 5.4 d) 0
 5.2 c) $18 - 26i$ 5.4 e) -1
 5.2 d) $-9 - 46i$ 5.4 f) 31
 5.3 a) $39 - 18i$
 5.3 b) 2197

Corrigés

- 5.1 a) On développe $(a + 2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2 - 1$.

 5.1 b) De $a^3 = a^2 - 1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2 - 1) = a^5 - a^3$ et donc $a^5 - a^6 = a^3$. De plus $a^3 = a^2 - 1$.

 5.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2 - 1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1 = -a^2 - a$ puis $a^{12} = (-a^2 - a)^2 = a^4 + 2a^3 + a^2$.

 5.1 d) L'égalité $a^3 - a^2 + 1$ peut s'écrire $a(a - a^2) = 1$ ce qui montre que $a \neq 0$ et $\frac{1}{a} = a - a^2$. Alors $\frac{1}{a^2} = 1 - a$.

 5.2 a) On développe : $(3 + i)^2 = 9 + 6i + i^2$.

 5.2 b) On développe : $(3 - i)^2 = 9 + 6(-i) + (-i)^2 = 9 - 6i + i^2$.

 5.2 c) D'après le calcul précédent : $(3 - i)^3 = (8 - 6i)(3 - i) = 24 - 18i - 8i + 6i^2$.

 5.2 d) On développe directement : $(3 - 2i)^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2(2i)^1 + 3 \cdot 3^1(2i)^2 - (2i)^3$.

 5.3 a) On développe : $24 - 30i + 12i - 15i^2$.

 5.3 b) En remarquant que $(2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 + 9$, on obtient par associativité 13^3 .

 5.3 c) On développe : $(-4 + i\sqrt{5})^3 = -4^3 + 3 \cdot 4^2(i\sqrt{5}) - 3 \cdot 4^1(i\sqrt{5})^2 + (i\sqrt{5})^3 = -64 + 48i\sqrt{5} + 60 - 5i\sqrt{5}$.

 5.3 d) On développe : $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = -\frac{1}{8} + 3 \cdot i\frac{\sqrt{3}}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} - i\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

 5.4 a) De $a^5 = 1$, on déduit $a^7 = a^2$ et $a^6 = a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4 - 1 = 3$.

Fiche n° 6. Équations du second degré

Réponses

6.1 a) $\boxed{3, 3}$

6.1 b) $\boxed{-1/3, -1/3}$

6.1 c) $\boxed{2, -6}$

6.1 d) $\boxed{2, 3}$

6.1 e) $\boxed{0, \text{ donc } 5}$

6.1 f) $\boxed{0, \text{ donc } -3/2}$

6.1 g) $\boxed{\emptyset}$

6.1 h) $\boxed{1 \text{ donc } -5}$

6.1 i) $\boxed{1 \text{ donc } 8/3}$

6.1 j) $\boxed{-1 \text{ donc } -19/5}$

6.2 a) $\boxed{6, 7}$

6.2 b) $\boxed{-3, -5}$

6.2 c) $\boxed{-7, -11}$

6.2 d) $\boxed{-3, 11}$

6.2 e) $\boxed{a, b}$

6.2 f) $\boxed{a - b, a + b}$

6.3 a) $\boxed{2/3}$

6.3 b) $\boxed{-2/7}$

6.3 c) $\boxed{-1/m}$

6.3 d) $\boxed{2m/(m + 3)}$

6.7 a) $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$

6.7 b) $\boxed{a = -2 \text{ et } b = 1}$

6.7 c) $\boxed{a = -3 \text{ et } b = 5}$

6.7 d) $\boxed{a = 1/2 \text{ et } b = 8}$

6.7 e) $\boxed{a = 1 \text{ et } b = 3\sqrt{7}}$

6.8 a) $\boxed{] - \infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[}$

6.8 b) $\boxed{[-3, 5]}$

6.8 c) $\boxed{] - \infty, -1] \cup [2/3, +\infty[}$

6.8 d) $\boxed{] - \infty, -1/2[\cup [4, +\infty[}$

Corrigés

6.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

6.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12 .

6.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

6.1 g) La fonction $x \mapsto 2x^2 + 3$ est strictement positive car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

6.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

.....

6.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

.....

6.8 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $] -\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

.....

6.8 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $] -\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $] -3, 5[$.

.....

6.8 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $] -\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $] -1, 2/3[$.

.....

6.8 d) Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est strictement positif sur $] -\infty, -1/2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $] -1/2, 4[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

.....

Fiche n° 7. Exponentielle et logarithme

Réponses

7.1 a).....	$4 \ln 2$	7.5 b).....	$\frac{1}{2}$	7.8 a).....	\mathbb{R}
7.1 b).....	$9 \ln 2$	7.5 c).....	$\frac{1}{3}$	7.8 b).....	ok
7.1 c).....	$-3 \ln 2$	7.5 d).....	$\frac{1}{9}$	7.8 c).....	1
7.1 d).....	$\frac{1}{2} \ln 2$	7.5 e).....	$-\frac{1}{2}$	7.8 d).....	-1
7.1 e).....	$3 \ln 2$	7.5 f).....	$\frac{3}{2}$	7.9 a).....	$x + \ln 2$
7.1 f).....	$2 \ln 2 + 2 \ln 3$	7.6 a).....	-2	7.9 b).....	$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
7.2 a).....	$-\ln 3 - 2 \ln 2$	7.6 b).....	$\frac{1}{\ln 2}$	7.9 c).....	$\ln x - 1 $
7.2 b).....	$2 \ln 3 - 2 \ln 2$	7.6 c).....	-17	7.9 d).....	$-\frac{1}{1+x}$
7.2 c).....	$\ln 3 + 11 \ln 2$	7.6 d).....	1	7.9 e).....	$(1+x)^x$
7.2 d).....	$3 \ln 5 + 2 \ln 2$	7.6 e).....	-1	7.10 a).....	$x \geq \frac{\ln 12 + 5}{3}$
7.2 e).....	$-2 \ln 5 + 4 \ln 2$	7.6 f).....	e	7.10 b).....	$x \in [0, 1]$
7.2 f).....	$2 \ln 5 - 2 \ln 2$	7.7 a).....	impaire	7.10 c).....	$x \geq \frac{2}{e}$
7.3.....	$-2 \ln 2 - 2 \ln 5$	7.7 b).....	impaire	7.10 d).....	$x \geq -\frac{1}{12}$
7.4 a).....	$\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$	7.7 c).....	impaire	7.10 e).....	\emptyset
7.4 b).....	$17 + 12\sqrt{2}$	7.7 d).....	impaire	7.10 f).....	$\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$
7.4 c).....	0				
7.4 d).....	0				
7.5 a).....	8				

Corrigés

7.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln 16 = 4 \ln 2$.

7.1 c) On a $0,125 = \frac{1}{8}$ donc $\ln 0,125 = -\ln 8 = -3 \ln 2$.

7.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln 72 - 2 \ln 3 = (3 \ln 2 + 2 \ln 3) - 2 \ln 3 = 3 \ln 2$.

7.2 c) On a $0,875 = \frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned} \ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln(0,875) &= (\ln 3 + \ln 7) + 2(\ln 2 + \ln 7) - 3(\ln 7 - \ln 8) \\ &= \ln 3 + 2 \ln 3 + 3 \times 3 \ln 2 = 3 \ln 3 + 11 \ln 2. \end{aligned}$$

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \dots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k + 1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

7.4 a) On a $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2} + 1) = \frac{7}{16} \ln((1 + \sqrt{2})^2) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{7}{8} \ln(1 + \sqrt{2}) + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$$

d'où finalement $\alpha = -\frac{7}{8} \ln \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + 4 \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{25}{8} \ln \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$.

7.4 c) On a $\gamma = \ln\left(\left((2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})\right)^{20}\right) = \ln\left(\left(4 - 3\right)^{20}\right) = 0$

7.6 b) On a $e^{-\ln \ln 2} = e^{(-1) \ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \frac{1}{\ln 2}$.

7.6 e) On a $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right) = \frac{1}{2} \ln(\exp(-\ln e^2)) = \frac{1}{2}(-\ln e^2) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$.

7.7 a) f_1 est définie sur $] -2021, +2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in] -2021, +2021[, \quad f(-x) = \ln \frac{2021 - x}{2021 + x} = \ln \frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln \frac{2021 + x}{2021 - x} = -f_1(x).$$

7.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq |x| < \sqrt{x^2 + 1}$ donc f_2 est définie sur \mathbb{R} et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \ln \frac{-x^2 + (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

7.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $] -\infty, -5[\cap \left(]61, +\infty[\cap] -\infty, -7[\right)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $] -\infty, -5[\cap \left(] -\infty, -7[\cup]61, +\infty[\right)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $] -\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $] -\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \frac{-13 + \sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in] -\infty, -7[$ et $x_2 \notin] -\infty, -7[$.

Fiche n° 8. Trigonométrie

Réponses

8.1 a)..... 0

8.1 b)..... 0

8.1 c)..... $-1 - \sqrt{3}$

8.1 d)..... $-\frac{1}{2}$

8.2 a)..... 0

8.2 b)..... $-\sin x$

8.2 c)..... $2 \cos x$

8.2 d)..... $-2 \cos x$

8.3 a)..... $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

8.3 b)..... $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

8.3 c)..... $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

8.3 d)..... $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

8.4 a)..... $-\sin x$

8.4 b)..... $\frac{1}{\cos x}$

8.4 c)..... 0

8.4 d)..... $4 \cos^3 x - 3 \cos x$

8.5 a)..... $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$

8.5 b)..... $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$

8.6 a)..... $\tan x$

8.6 b)..... 2

8.6 c)..... $8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

8.7 a)..... $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

8.7 a)..... $\left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$

8.7 a)..... $\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 b)..... $\left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

8.7 b)..... $\left\{ \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3} \right\}$

8.7 b)..... $\left\{ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 c)..... $\left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

8.7 c)..... $\left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\}$

8.7 c)..... $\left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 d)..... $\left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

8.7 d)..... $\left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

8.7 d)..... $\left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 e)..... $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

8.7 e)..... $\left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

8.7 e)..... $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 f)..... $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

8.7 f)..... $\left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

8.7 f)..... $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 g)..... $\left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}$

8.7 g)..... $\left\{ -\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\}$

8.7 g)..... $\left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

8.7 h)..... $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

8.7 h)..... $\left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

- 8.7 h) $\left\{ \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 8.7 i) $\left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7} \right\}$
- 8.7 i) $\left\{ -\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7} \right\}$
- 8.7 i) $\left\{ \frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 8.7 j) $\left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\}$
- 8.7 j) $\left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\}$
- 8.7 j) $\left\{ \frac{5\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{9\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- 8.8 a) $\left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi \right]$
- 8.8 a) $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$
- 8.8 b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right]$
- 8.8 b) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$
- 8.8 c) $\left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi \right]$
- 8.8 c) $\left[-\pi, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$
- 8.8 d) $\left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi \right]$
- 8.8 d) $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$
- 8.8 e) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right]$
- 8.8 e) $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$
- 8.8 f) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right]$
- 8.8 f) $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$
- 8.8 g) $\left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right]$
- 8.8 g) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$
- 8.8 h) $\left[0, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi \right]$
- 8.8 h) $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{8} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi \right]$

Corrigés

8.3 b) On peut utiliser $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ puis les formules d'addition.

8.4 b) On a

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(2x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

On peut aussi faire cette simplification à l'aide des formules de duplication :

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} - \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

8.4 d) On calcule

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x = (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \cos x \sin^2 x \\ &= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \end{aligned}$$

8.5 a) On a $\cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ donc $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$. De plus, $\cos \frac{\pi}{8} \geq 0$ donc $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

8.5 b) On a $\sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{8} \geq 0$ donc $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

8.6 a) On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ donc $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \tan x$.

8.6 b) On a $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(2x)}{\sin x} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$.

8.6 c) On a $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

8.7 e) Cela revient à résoudre « $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ».

8.7 g) Si on résout avec $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x \in [0, 4\pi]$.

Or, dans $[0, 4\pi]$, on a $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pour $t \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{23\pi}{6} \right\}$ et donc pour $x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}$.

8.7 h) $\sin x$ est solution de l'équation de degré 2 : $2t^2 + t - 1 = 0$ dont les solutions sont $t = -1$ et $t = \frac{1}{2}$. Ainsi, les x solutions sont les x tels que $\sin x = -1$ ou $\sin x = \frac{1}{2}$.

8.7 j) On a $\cos \frac{\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = \sin \frac{5\pi}{14}$. Finalement, on résout $\sin x = \sin \frac{5\pi}{14}$.

8.8 d) Cela revient à résoudre $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$.

8.8 f) On résout « $\tan x \geq 1$ ou $\tan x \leq -1$ ».

8.8 g) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geq 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

8.8 h) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = 2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos t \geq 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 4\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}\right]$ puis $x \in \left[0, \frac{3\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi\right]$.

Fiche n° 9. Dérivation

Réponses

9.1 a) $6x^2 + 2x - 11$

9.1 b) $5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$

9.1 c) $(2x^2 - 2x + 10) \exp(2x)$

9.1 d) $(6x - 1) \ln(x - 2) + \frac{3x^2 - x}{x - 2}$

9.2 a) $5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$

9.2 b) $4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$

9.2 c) $8 \cos^2(x) - 6 \cos(x) \sin(x) - 4$

9.2 d) $-3(3 \cos(x) - \sin(x))^2(3 \sin(x) + \cos(x))$

9.3 a) $\frac{2x}{x^2 + 1}$

9.3 b) $\frac{1}{x \ln(x)}$

9.3 c) $(-2x^2 + 3x + 1) \exp(x^2 + x)$

9.3 d) $6 \cos(2x) \exp(3 \sin(2x))$

Corrigés

9.1 a) On calcule : $f'(x) = (2x + 3)(2x - 5) + (x^2 + 3x + 2) \times 2 = 6x^2 + 2x - 11$.

9.1 b) On calcule : $f'(x) = (3x^2 + 3)(x^2 - 5) + (x^3 + 3x + 2) \times 2x = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$.

9.1 c) On calcule : $f'(x) = (2x - 2) \exp(2x) + (x^2 - 2x + 6) \times 2 \exp(2x) = (2x^2 - 2x + 10) \exp(2x)$.

9.1 d) On calcule : $f'(x) = (6x - 1) \ln(x - 2) + (3x^2 - x) \times \frac{1}{x - 2} = (6x - 1) \ln(x - 2) + \frac{3x^2 - x}{x - 2}$.

9.2 a) On calcule : $f'(x) = 5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$.