

Cinématique

Solide en translation

⚙ Exercice 1.1 — Vitesse linéaire



Convertir les vitesses linéaires suivantes en m/s .

a) 200 km/h .

c) 46 km/min

e) 21 km/s

b) 27 m/h ...

d) 36 m/min

f) 44 m/h

⚙ Exercice 1.2 — Déplacement



a) Un ascenseur monte à une vitesse constante $v = 1,5\text{ m/s}$. Calculer la distance d en m parcourue en $t = 8\text{ s}$.

b) Un chariot de convoyeur parcourt $d = 6\text{ m}$ en $t = 12\text{ s}$ à vitesse constante. Calculer la vitesse v en km/h du chariot.

c) Un piston de vérin, initialement au repos, accélère uniformément à $a = 0,5\text{ m/s}^2$ pendant $t = 4\text{ s}$. Calculer la vitesse v en m/s atteinte par le piston à la fin de cette phase.

d) Une voiture, initialement à l'arrêt, accélère uniformément à $a = 3\text{ m/s}^2$. Calculer le temps t en s nécessaire pour atteindre une vitesse $v = 90\text{ km/h}$

Solide en rotation

⚙️ Exercice 1.3 — Vitesse angulaire



Convertir les vitesses angulaires suivantes en rad/s .

a) 250 tr/min

c) 318 tr/s ..

e) 44 tr/h

b) $27^\circ/s$

d) $414^\circ/min$

f) $19^\circ/h$.

⚙️ Exercice 1.4 — Vitesse linéaire



Vitesse linéaire

La relation entre la vitesse linéaire d'un objet $v(t)$ (en m/s) tournant dans un cercle de rayon R (en m) à la vitesse angulaire $\omega(t)$ (en rad/s) est la suivante :

$$v(t) = \omega(t) \times R$$

a) Calculer la vitesse d'une voiture v en km/h sachant que les roues ont un rayon $R = 200 \text{ mm}$ et tournent à la vitesse angulaire de $\omega = 1000 \text{ tr/min}$

b) Calculer la vitesse d'un cycliste v en m/s sachant que les roues du vélo ont un rayon $R = 0.3 \text{ m}$ et tournent à la vitesse angulaire de $\omega = 100 \text{ tr/min}$

c) Calculer la vitesse v en m/s du bout d'une pale d'un ventilateur de plafond sachant que les pales ont une longueur $L = 60 \text{ cm}$ et tournent à la vitesse angulaire de $\omega = 2 \text{ tr/s}$

d) Calculer la vitesse v en m/s à laquelle est propulsé un enfant assis au bord d'un manège à une distance du centre $d = 3 \text{ m}$ et effectue un tour en 8 s

Exercice 1.5 — Figure de changement de bases

••••

Produit scalaire

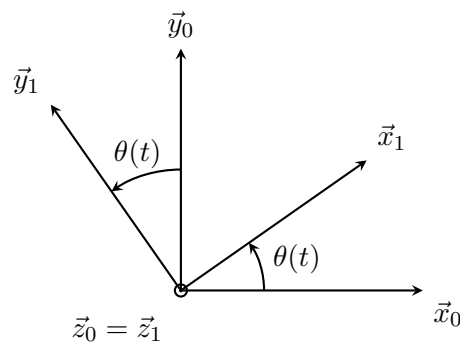
Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'exprime : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Projection

Le projeté d'un vecteur $\vec{u}$ dans une base orthonormée $B(\vec{x}, \vec{y})$ s'exprime : $\vec{u} = u_x \vec{x} + u_y \vec{y}$

Avec : $u_x = \vec{u} \cdot \vec{x}$ et $u_y = \vec{u} \cdot \vec{y}$

Lorsque l'on souhaite décrire le mouvement de rotation d'un solide 1 par rapport à un solide 0, on utilise souvent une figure de changement de bases représentant la rotation d'angle $\theta(t)$ d'une base B_1 orthonormée liée au solide 1 par rapport à une base B_0 orthonormée liée au solide 0 :



a) Écrire le projeté du vecteur $\vec{x}_1$ dans la base B_0 .

b) Écrire le projeté du vecteur $\vec{y}_1$ dans la base B_0 .

c) Écrire le projeté du vecteur $\vec{z}_1$ dans la base B_0 ..

d) Écrire le projeté du vecteur $\vec{x}_0$ dans la base B_1 .

e) Écrire le projeté du vecteur $\vec{y}_0$ dans la base B_1 ..

Statique

Équilibre des solides

⚙️ Exercice 2.1 — Moment d'une force



Moment d'une force

La relation entre le moment M (en $N.m$) d'une force F (en N) appliquée perpendiculairement à un bras de levier de longueur L (en m) est la suivante :

$$M = F \times L$$

a) Calculer le moment M en $N.m$ d'une force $F = 80\text{ N}$ appliquée perpendiculairement à une clé à molette de longueur $L = 30\text{ cm}$

b) Calculer le moment M en $N.m$ exercé sur une porte par une force $F = 20\text{ N}$ appliquée perpendiculairement sur la poignée, située à une distance $d = 80\text{ cm}$ des gonds

c) Calculer le moment M en $N.m$ exercé par un cycliste appuyant avec une force $F = 400\text{ N}$ perpendiculaire à une manivelle de pédalier de longueur $L = 17\text{ cm}$

Équilibre des moments

Un solide pivotant autour d'un axe fixe est en équilibre si la somme des moments des forces qui s'exercent sur lui, par rapport à cet axe, est nulle :

$$\sum_i^n M_i = 0$$

a) Une balançoire à bascule est à l'équilibre. Un enfant de $m_1 = 25 \text{ kg}$ est assis à $d_1 = 1,8 \text{ m}$ du pivot. Calculer la distance d_2 en m à laquelle doit s'asseoir un enfant de $m_2 = 30 \text{ kg}$ de l'autre côté pour équilibrer la balançoire

b) Une brouette chargée de masse $m = 40 \text{ kg}$ a son centre de gravité situé à $d_1 = 40 \text{ cm}$ de la roue (pivot). Le jardinier soulève les manches, perpendiculairement, à $d_2 = 1,2 \text{ m}$ de la roue. Calculer la force F en N qu'il doit exercer pour maintenir la brouette à l'équilibre (on prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$)

c) Un boulon grippé nécessite un moment de desserrage $M = 20 \text{ N.m}$. Un mécanicien ne peut exercer qu'une force maximale $F = 80 \text{ N}$, perpendiculairement à la clé. Calculer la distance L en m à laquelle il doit appliquer cette force par rapport à l'axe du boulon pour parvenir à le desserrer

Les transmetteurs

Les transmetteurs

⚙ Exercice 3.1 — Les engrenages



Rapport de transmission par engrenages

Pour deux roues dentées en contact, de rayons R_1 et R_2 (ou de nombre de dents Z_1 et Z_2), tournant respectivement aux vitesses angulaires ω_1 et ω_2 , la condition de roulement sans glissement au point de contact impose :

$$\omega_1 \times R_1 = \omega_2 \times R_2 \quad \text{soit} \quad \omega_1 \times Z_1 = \omega_2 \times Z_2 \quad \text{donc} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

a) Une roue 1 de rayon $R_1 = 20 \text{ mm}$ tourne à $\omega_1 = 1500 \text{ tr/min}$ et entraîne une roue 2 de rayon $R_2 = 60 \text{ mm}$. Calculer la vitesse de rotation ω_2 en *tr/min*.

b) Un pignon 1 de $Z_1 = 15$ dents entraîne un pignon 2 de $Z_2 = 45$ dents. Calculer le rapport de transmission $r = \omega_2/\omega_1$ de cet engrenage.

c) Sur un vélo, le plateau (pédalier) compte $Z_1 = 40$ dents et tourne à $\omega_1 = 80 \text{ tr/min}$. Le pignon arrière compte $Z_2 = 16$ dents. Calculer la vitesse de rotation ω_2 en *tr/min* du pignon arrière (et donc de la roue).

d) On souhaite qu'un pignon 2 tourne à $\omega_2 = 200 \text{ tr/min}$ à partir d'un moteur tournant à $\omega_1 = 3000 \text{ tr/min}$ dont le pignon compte $Z_1 = 18$ dents. Calculer le nombre de dents Z_2 que doit avoir le pignon 2

Transformation de mouvement vis-écrou

Un système vis-écrou transforme un mouvement de rotation de la vis (vitesse angulaire ω , en rad/s) en un mouvement de translation de l'écrou (vitesse linéaire v , en m/s). Pour une vis de pas p (en m), la relation est :

$$v = \frac{\omega \times p}{2\pi}$$

où p représente la distance parcourue par l'écrou pour un tour complet de la vis.

a) Une vis de pas $p = 2 \text{ mm}$ tourne à $\omega = 300 \text{ tr/min}$. Calculer la vitesse de translation v en mm/s de l'écrou.

b) Un vérin à vis doit soulever une charge à une vitesse $v = 5 \text{ mm/s}$. La vis utilisée a un pas $p = 4 \text{ mm}$. Calculer la vitesse de rotation ω en tr/min que doit fournir le moteur du vérin.

c) Un étau d'établi possède une vis de pas $p = 3 \text{ mm}$. L'utilisateur tourne la manivelle à $\omega = 1 \text{ tr/s}$. Calculer le temps t en s nécessaire pour fermer l'étau de $d = 30 \text{ mm}$.

d) Une table de machine-outil doit se déplacer de $d = 100 \text{ mm}$ en $t = 20 \text{ s}$, entraînée par une vis de pas $p = 5 \text{ mm}$. Calculer le nombre de tours n que doit effectuer la vis pour réaliser ce déplacement.

Corrigé

1.1 a) On convertit 200 km/h en m/s :

$$v = 200 \text{ km/h} = \frac{200 \times 1000}{3600} \text{ m/s} \approx 5,6 \cdot 10^1 \text{ m/s}$$

1.1 b) On convertit 27 m/h en m/s :

$$v = 27 \text{ m/h} = \frac{27}{3600} \text{ m/s} \approx 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$$

1.1 c) On convertit 46 km/min en m/s :

$$v = 46 \text{ km/min} = \frac{46 \times 1000}{60} \text{ m/s} \approx 7,7 \cdot 10^2 \text{ m/s}$$

1.1 d) On convertit 36 m/min en m/s :

$$v = 36 \text{ m/min} = \frac{36}{60} \text{ m/s} \approx 6,0 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$$

1.1 e) On convertit 21 km/s en m/s :

$$v = 21 \text{ km/s} = 21 \times 1000 \text{ m/s} \approx 2,1 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

1.1 f) On convertit 44 m/h en m/s :

$$v = 44 \text{ m/h} = \frac{44}{3600} \text{ m/s} \approx 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

1.2 a) L'ascenseur étant en translation rectiligne uniforme, on a $d = v \times t$:

$$d = 1,5 \times 8 = 1,2 \cdot 10^1 \text{ m} = 12 \text{ m}$$

1.2 b) Le chariot étant en translation rectiligne uniforme, on a $v = d/t$:

$$v = \frac{6}{12} = 0,5 \text{ m/s} = 0,5 \times 3,6 \text{ km/h} = 1,8 \text{ km/h}$$

1.2 c) Le piston étant initialement au repos et accélérant uniformément, on a $v = a \times t$:

$$v = 0,5 \times 4 = 2,0 \text{ m/s}$$

1.2 d) On convertit d'abord la vitesse visée en m/s :

$$v = 90 \text{ km/h} = \frac{90}{3,6} = 25 \text{ m/s}$$

La voiture étant initialement à l'arrêt et accélérant uniformément, on a $v = a \times t$, soit :

$$t = \frac{v}{a} = \frac{25}{3} \approx 8,3 \text{ s}$$

.....
1.3 a) On convertit 250 tr/min en rad/s :

$$\omega = 250 \times \frac{2\pi}{60} = 2,6 \cdot 10^1 \text{ rad/s}$$

.....
1.3 b) On convertit $27 /s$ en rad/s :

$$\omega = 27 \times \frac{\pi}{180} = 4,7 \cdot 10^{-1} \text{ rad/s}$$

.....
1.3 c) On convertit 318 tr/s en rad/s :

$$\omega = 318 \times 2\pi = 2,0 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

.....
1.3 d) On convertit $414 /min$ en rad/s :

$$\omega = 414 \times \frac{\pi}{180 \times 60} = 1,2 \cdot 10^{-1} \text{ rad/s}$$

.....
1.3 e) On convertit 44 tr/h en rad/s :

$$\omega = 44 \times \frac{2\pi}{3600} = 7,7 \cdot 10^{-2} \text{ rad/s}$$

.....
1.3 f) On convertit $19 /h$ en rad/s :

$$\omega = 19 \times \frac{\pi}{180 \times 3600} = 9,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

.....
1.4 a) On convertit ω en rad/s , puis on applique $v = \omega \times R$:

$$\omega = 1000 \times \frac{2\pi}{60} = 104,7 \text{ rad/s}, \quad v = 104,7 \times 0,2 = 20,9 \text{ m/s} = 75 \text{ km/h}$$

.....
1.4 b) On convertit ω en rad/s , puis on applique $v = \omega \times R$:

$$\omega = 100 \times \frac{2\pi}{60} = 10,5 \text{ rad/s}, \quad v = 10,5 \times 0,3 = 3,1 \text{ m/s}$$

.....
1.4 c) On convertit ω en rad/s , puis on applique $v = \omega \times L$:

$$\omega = 2 \times 2\pi = 12,6 \text{ rad/s}, \quad v = 12,6 \times 0,6 = 7,5 \text{ m/s}$$

.....
1.4 d) On calcule d'abord ω à partir de la période $T = 8 \text{ s}$, puis on applique $v = \omega \times d$:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} = 0,785 \text{ rad/s}, \quad v = 0,785 \times 3 = 2,4 \text{ m/s}$$

.....
1.5 a) En projetant $\vec{x}_1$ sur les axes de B_0 :

$$\vec{x}_1 = \cos \theta \vec{x}_0 + \sin \theta \vec{y}_0$$

.....
1.5 b) En projetant $\vec{y}_1$ sur les axes de B_0 :

$$\vec{y}_1 = -\sin \theta \vec{x}_0 + \cos \theta \vec{y}_0$$

.....
1.5 c) L'axe de rotation étant commun aux deux bases :

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_0$$

.....
1.5 d) En projetant $\vec{x}_0$ sur les axes de B_1 (rotation d'angle $-\theta$ par rapport à B_1) :

$$\vec{x}_0 = \cos \theta \vec{x}_1 - \sin \theta \vec{y}_1$$

.....
1.5 e) En projetant $\vec{y}_0$ sur les axes de B_1 :

$$\vec{y}_0 = \sin \theta \vec{x}_1 + \cos \theta \vec{y}_1$$

.....
2.1 a) La force étant perpendiculaire au bras de levier, on a $M = F \times L$:

$$M = 80 \times 0,3 = 24 \text{ N.m}$$

.....
2.1 b) La force étant perpendiculaire au bras de levier, on a $M = F \times d$:

$$M = 20 \times 0,8 = 16 \text{ N.m}$$

.....
2.1 c) La force étant perpendiculaire au bras de levier, on a $M = F \times L$:

$$M = 400 \times 0,17 = 68 \text{ N.m}$$

.....
2.2 a) À l'équilibre, la somme des moments par rapport au pivot est nulle : $m_1 g d_1 = m_2 g d_2$, soit :

$$d_2 = \frac{m_1 d_1}{m_2} = \frac{25 \times 1,8}{30} = 1,5 \text{ m}$$

.....
2.2 b) À l'équilibre, la somme des moments par rapport à la roue est nulle : $F \times d_2 = mg \times d_1$, soit :

$$F = \frac{mg d_1}{d_2} = \frac{40 \times 10 \times 0,4}{1,2} = 133,3 \text{ N}$$

.....
2.2 c) La force étant perpendiculaire à la clé, on a $M = F \times L$, soit :

$$L = \frac{M}{F} = \frac{20}{80} = 0,25 \text{ m}$$

.....
3.1 a) D'après la condition de roulement sans glissement, $\omega_1 \times R_1 = \omega_2 \times R_2$, soit :

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{R_2} = \frac{1500 \times 20}{60} = 500 \text{ tr/min}$$

.....
3.1 b) D'après la relation $\omega_1 \times Z_1 = \omega_2 \times Z_2$, le rapport de transmission vaut :

$$r = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

.....
3.1 c) D'après la relation $\omega_1 \times Z_1 = \omega_2 \times Z_2$, on a :

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 Z_1}{Z_2} = \frac{80 \times 40}{16} = 200 \text{ tr/min}$$

.....
3.1 d) D'après la relation $\omega_1 \times Z_1 = \omega_2 \times Z_2$, on a :

$$Z_2 = \frac{Z_1 \omega_1}{\omega_2} = \frac{18 \times 3000}{200} = 270 \text{ dents}$$

.....
3.2 a) On convertit ω en tr/s , puis on applique $v = \omega \times p$:

$$\omega = 300 \text{ tr/min} = 5 \text{ tr/s}, \quad v = 5 \times 2 = 10 \text{ mm/s}$$

.....
3.2 b) D'après $v = \omega \times p$ (avec ω en tr/s) :

$$\omega = \frac{v}{p} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ tr/s} = 75 \text{ tr/min}$$

.....
3.2 c) Le nombre de tours nécessaire pour fermer l'étau de $d = 30 \text{ mm}$ vaut $n = d/p$, puis $t = n/\omega$:

$$n = \frac{30}{3} = 10 \text{ tours}, \quad t = \frac{n}{\omega} = \frac{10}{1} = 10 \text{ s}$$

.....
3.2 d) Le nombre de tours nécessaire pour un déplacement $d = 100 \text{ mm}$ vaut $n = d/p$:

$$n = \frac{100}{5} = 20 \text{ tours}$$