

FEUILLE DE TD N° 5

Primitives et équations différentielles

■ *Calculs directs de primitives/intégrales***Exercice 1.** Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|---|--|-------------------------------------|
| 1. $\int_1^8 x^6 dx$ | 7. $\int_0^2 \frac{x^{2n-1}}{1+x^{2n}} dx, n \in \mathbb{N}^*$ | 13. $\int_0^3 (1-t)^6 dt$ |
| 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx$ | 8. $\int_0^1 \frac{1}{x+3} dx$ | 14. $\int_0^3 (1-t^2)^3 dt$ |
| 3. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos(x)^2} dx$ | 9. $\int_{-5}^{-4} \frac{1}{x-2} dx$ | 15. $\int_0^3 (1-t^2)^3 t dt$ |
| 4. $\int_0^5 \exp(-t) dt$ | 10. $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$ | 16. $\int_0^3 (t^2 + t^4)^3 dt$ |
| 5. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ | 11. $\int_2^4 \frac{1}{x \ln(x)} dx$ | 17. $\int_0^2 \frac{1}{1+4x^2} dx$ |
| 6. $\int_1^{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ | 12. $\int_0^2 t e^{-t^2} dt$ | 18. $\int_0^2 \cos(t) \sin(t) dt$ |
| | | 19. $\int_0^2 \cos(t)^5 \sin(t) dt$ |

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|---------------------------------------|-----------------------------------|---|
| 1. $\int_1^8 \frac{x}{x+1} dx$ | 5. $\int_2^4 \frac{1}{x(x+1)} dx$ | 9. $\int_0^3 \frac{1}{5+x^2} dx$ |
| 2. $\int_1^8 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ | 6. $\int_0^2 x \sqrt{x+1} dx$ | 10. $\int_0^3 (\cos(x)^2)^4 \cos(x) dx$ |
| 3. $\int_2^4 \frac{x-1}{x+1} dx$ | 7. $\int_0^1 \tan(x)^2 dx$ | 11. $\int_1^3 \frac{\exp(10x)-1}{\exp(x)-1} dx$ |
| 4. $\int_2^4 \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx$ | 8. $\int_0^2 \frac{1}{4x+3} dx$ | |

Exercice 3. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

- | | | |
|--|---|-------------------------------|
| 1. $f_1 : t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3}$ | 2. $f_2 : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ | 3. $f_3 : t \mapsto \tan(2x)$ |
|--|---|-------------------------------|

Exercice 4 (Linéarisation).

- Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \cos(x)^2 \sin(x)$.
- Déterminer une primitive de $g : x \mapsto \cos(2x) \sin(3x)$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1. $\int_1^8 \exp^{2x} \cos(x) dx$ | 3. $\int_1^2 \exp(3x) \exp(-x) \sin(-x) dx$ |
| 2. $\int_0^1 \exp(-x) \sin(2x) dx$ | 4. $\int_2^3 \exp(2x) \cos(x) \sin(3x) dx$ |

■ *Intégration par parties***Exercice 6.** En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

- | | | |
|--|---------------------------------------|--|
| 1. $\int_1^e x(\ln(x))^2 dx$ | 5. $\int_0^M x \exp(-x) dx$ | 9. $\int_1^2 (2x + 1) \sin(3x) dx$ |
| 2. $\int_0^3 x \sqrt{x+1} dx$ | 6. $\int_{-M}^0 (2x + 1) \exp(2x) dx$ | 10. $\int_0^1 x^2 \cos(2x) dx$ |
| 3. $\int_1^4 (x+3) \ln(x) dx$ | 7. $\int_0^1 x^2 \exp(2x) dx$ | 11. $\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ |
| 4. $\int_2^3 \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) dx$ | 8. $\int_0^1 x \cos(x) dx$ | 12. $\int_1^3 \frac{\ln(t)}{t^n} dt, n \geq 2$ |

Exercice 7. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction arctan.
Déterminer une primitive sur $] -1, 1[$ de la fonction arccos.**Exercice 8.**

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une primitive de la fonction $f(x) = x^n \ln(x)$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$ avec $a \neq -1$, déterminer une primitive de $g(x) = x^a \ln(x)$.
- Déterminer une primitive de $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

■ *Changement de variable***Exercice 9.** Calculer les intégrales suivantes en effectuant les changements de variables suggérés.

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt$, (poser $u = e^t$) | 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^3 dt$, (poser $u = \sin(t)$) |
| 2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, (poser $x = \sin(u)$) | 5. $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$, (poser $u = 2x+1$) |
| 3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2t)}{(1+\cos(t))^2} dt$, (poser $u = \cos(t)$) | 6. $\int_0^3 \cos(x)^{2n} \cos(x) dx$ (poser $t = \sin(x)$) |

Exercice 10. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^3 \frac{1}{x^2+2x+3} dx$	3. $\int_3^4 \frac{1}{x^2-2x-1} dx$	5. $\int_0^M \frac{2+x}{x^2+2x+3} dx$
2. $\int_0^3 \frac{1}{x^2+2x+1} dx$	4. $\int_2^3 \frac{1}{2x^2+7} dx$	6. $\int_0^1 \frac{2}{3x^2-2x+1} dx$

■ Résolution d'équations différentielles

Exercice 11. Résoudre les équations différentielles suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1. Sur $\mathbb{R}$, $y' - 3y = 0$. | 10. $\forall x \in \mathbb{R}_*, x^3 y'(x) = 2y(x)$. |
| 2. Sur $\mathbb{R}$, $y' - \cos y = 0$. | 11. $\forall t \in \mathbb{R}_+, t^2 y'(t) - (2t - 1)y(t) = t^2$. |
| 3. $\forall x \in \mathbb{R}_+, y'(x) - 2x^2 y(x) = 0$. | 12. $\forall t \in \mathbb{R}, (1 + t^2)y'(t) + ty(t) = \sqrt{1 + t^2}$. |
| 4. $\forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)y'(x) + y(x) = 0$. | 13. Sur $\mathbb{R}$, $4y' - y = 0$ et $y(0) = 0$. |
| 5. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 3y(x) = 2e^{4x}$. | 14. $\forall t \in]-1, +\infty[, (1 + t^3)y'(t) + 3ty(t) = 0$ et $y(0) = 1$. |
| 6. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = (x^2 + 1)e^{-2x}$. | 15. Sur $\mathbb{R}$, $y' - \cos y = \cos$ et $y(\pi) = 1$. |
| 7. Sur $\mathbb{R}$, $y' - \cos y = \cos$. | 16. $\forall x \in \mathbb{R}, (1 + x^2)y'(x) + y(x) = 0$ et $y(1) = 1$. |
| 8. Sur $\mathbb{R}$, $y' + 2y = \sin$. | |
| 9. Sur $\mathbb{R}$, $y' - \exp y = 2 \exp$.
Déterminer une solution particulière constante. | |

Exercice 12. Résoudre les équations différentielles suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1. $y'' - 5y' + 6y = 0$. | 7. $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 3 \exp(-t)$. |
| 2. $y'' + 3y' - 6y = 1$. | 8. $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = e^{2t}$. |
| 3. $y'' + 3y' - 6y = 2x + 3$.
Chercher $y_p : x \mapsto ax + b$. | 9. $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = e^{2t}$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. |
| 4. $y'' + y = 0$. | 10. $\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-t} \cos(t)$. |
| 5. $y'' + y = 1$. | |
| 6. $y'' + y = 1$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. | |

Exercice 13. L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan(x)) dx$$

En posant $u = \pi/4 - x$, montrer que $I = \int_0^{\pi/4} \ln(2) dt - I$.

En déduire la valeur de I .

Exercice 14 (Mouvement d'une particule chargée).

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} x''(t) = \omega y'(t) \\ y''(t) = -\omega x'(t) \\ z''(t) = 0 \end{cases}$$

où ω est une constante. On pose la fonction $u = x' + iy'$.

Déterminer une équation différentielle vérifiée par la fonction u , et la résoudre.

Puis, déterminer une expression des fonctions x, y et z .

Décrire le comportement de ces fonctions sur $[0, +\infty[$ selon les valeurs de ω .

Exercice 15 (Petites oscillations d'un pendule libre). Un pendule pesant de longueur l est placé dans un champs de pesanteur d'intensité g .

On suppose que l'angle $\theta(t)$ qu'il forme avec la verticale reste à chaque instant t petit de sorte que l'approximation $\sin(\theta(t)) \sim \theta(t)$ soit raisonnable.

La fonction θ vérifie alors l'équation : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$.

Résoudre l'équation différentielle, et déterminer une expression de $\theta(t)$.

Exercice 16 (Une équation fonctionnelle).

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x)f(y).$$

On fixera y et on fera apparaître une équation différentielle en x dont f est une solution.

Exercice 17 (Calculs de périmètres, aires, volumes). Soient $(r, R) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

- Le périmètre du cercle $\mathcal{C}((0, 0), r)$ vaut $P_r = \int_0^{2\pi} \|((r \cos(t))', (r \sin(t))')\| dt$, avec $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Déterminer P_r .
- Le disque $D((0, 0), R)$ est la réunion disjointe des cercles $\mathcal{C}((0, 0), r)$, pour tout $r \in [0, R]$. Son aire vaut $A_R = \int_0^R P_r dr$. Déterminer A_R .
- La sphère $S((0, 0, 0), r)$ est une surface obtenue par révolution de la courbe de $g : x \in [-r, r] \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}$ selon l'axe Ox . Son aire vaut $S_r = \int_{-r}^r 2\pi g(t) \|(1, g'(t))\| dt$. Déterminer S_r .
- La boule $B((0, 0, 0), R)$ est la réunion disjointe des sphères $S((0, 0, 0), r)$, pour tout $r \in [0, R]$. Son volume vaut $V_R = \int_0^R S_r dr$. Déterminer V_R .