FEUILLE DE TD Nº 6

 $Arithm\'etique\ dans\ \mathbb{N}$, D'enombrement

Exercice 1.

Déterminer la division euclidienne de 154 par 12.

En déduire que 12 ne divise pas 154.

Est-ce que 13 divise 151? Est-ce que 7 divise 2024?

Exercice 2.

- 1. Calculer pgcd(33, 28) avec l'algorithme d'Euclide.
- 2. Calculer pgcd(12, 15) et ppcm(12, 15).
- 3. Calculer $\operatorname{pgcd}(238,1520)$, $\operatorname{pgcd}(55,1243)$, $\operatorname{pgcd}(21,857)$, $\operatorname{pgcd}(136,248)$, $\operatorname{pgcd}(568,1024)$.
 - On pourra utiliser la décomposition en produits de facteurs premiers pour certains pgcd.
- 4. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\operatorname{pgcd}(n^2, n^5 + 1) = 1$. On posera d un diviseur commun de ces deux nombres.

Exercice 3. Déterminer le nombre d'entiers naturels n tels que leur quotient dans la division euclidienne par 23 est égal à leur reste.

Exercice 4.

- 1. Décomposer 1260 en produit de facteurs premiers. En déduire pgcd(1260, 55) et ppcm(1260, 55).
- 2. Décomposer en produit de facteurs premiers : 67, 144, 5555.
- 3. Déterminer tous les nombres premiers inférieurs à 100. On pourra s'aider d'un tableau 10×10 en éliminant tous les nombres qui ne sont pas premiers (méthode du Crible d'Eratosthène).

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit (q, r) la division euclidienne de n par 3. Quelles sont les valeurs possibles de r? Montrer alors que 3 ne divise pas $n^2 + 1$.

Exercice 6. Déterminer si les nombres suivants sont premiers ou non : 351, 141, 143, 179, 189, 2023.

Exercice 7 (Divisibilité d'un coefficient binomial). Soit p un nombre premier.

Montrer que p divise $\binom{p}{k}$, pour tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$.

Montrer, à l'aide d'une récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p - n$ est divisible par p.

Exercice 8. Soit n > 1 un entier.

Trouver un entier $m \ge 0$ tel que $m, m+1, \ldots, m+n$ ne sont pas premiers. On pourra regarder autour de n!.

Exercice 9.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n+2 \mid n^2+5$. Montrer que l'on a alors $n+2 \mid 9$.
- Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+2 \mid n^2+5$.

Exercice 10.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \ge 0$, on a $4 \mid 5^n + 3$. On cherchera une relation de récurrence entre $5^n + 3$ et $5^{n+1} + 3$.

Exercice 11. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

- 1. Soit (p,q) la division euclidienne de n par 4. Si n est impair, quelles sont les valeurs possibles de r?
- 2. Si n est impair, montrer qu'il existe alors $q' \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 4q' + 1$.
- 3. Montrer que n + m et $n^2 + m^2$ ont la même parité.
- 4. Montrer que $4 \mid n^2 + m^2 \operatorname{ssi} 2 \mid n \operatorname{et} 2 \mid m$.

Exercice 12.

- 1. Déterminer $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ telle que 10u + 7v = 1.
- 2. Déterminer $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ telle que 134u + 7v = 1.
- 3. Soit $(u',v') \in \mathbb{Z}^2$ telle que 134u'+7v'=1. Montrer que 134(u'-u)=7(v-v').
- 4. Montrer que $7 \mid u' u$. On pose u' u = 7k.
- 5. Montrer que (u', v') = (u + 7k, v 134k).

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$ *. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on note $a \equiv b \mod(n)$ si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

On dit alors que ${\bf a}$ et ${\bf b}$ sont congrus modulo ${\bf n}$.

- 1. Montrer que $136 \equiv 25 \mod(3)$ et que $1000 \equiv 13 \mod(7)$.
- 2. Démontrer que l'on a $a \equiv b \mod(n)$ ssi $n \mid b a$.
- 3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv b \, mod(n)$ et $c \equiv d \, mod(n)$. Démontrer que $a + c \equiv b + d \, mod(n)$ et que $ac \equiv bd \, mod(n)$. On pourra procéder en deux étapes.
- 4. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 4n par 3, en fonction de $n \in \mathbb{N}$. On fera une disjonction de cas.

- 5. En utilisant la relation $10 \equiv 3 \mod(7)$, montrer que $1000000 \equiv 1 \mod(7)$.
- 6. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 3^n par 5, en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
- 7. Montrer que $7^{7^7} \equiv 3 \mod(10)$.

Exercice 14. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n^2 - nm - 2m^2 = 340$.

Déterminer les valeurs possibles de (n, m).

On pourra regarder un polynôme en n et essayer de le factoriser.

Exercice 15 (Nombre de Fermat). Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On pose $n = 2^m + 1$. On dit que n est un nombre de Fermat si n est un nombre premier.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $x^{2k+1} + 1 = (x+1)(\sum_{j=0}^{2} k(-x)^{j})$. Montrer que si n est un nombre de Fermat, alors m est de la forme $m = 2^{r}$, pour $r \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

■ Dénombrement . . .

Exercice 16. Soit E un ensemble à n éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à p éléments.

- 1. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(\emptyset)$? et de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$?
- 2. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E \setminus A)$?
- 3. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A?

Exercice 17. On lance deux dés, de couleurs différentes, à 6 faces.

- 1. Combien de résultats sont possibles?
- 2. Quelles valeurs sont possibles pour la somme des deux faces obtenues?
- 3. On lance maintenant deux dés à 6 faces qui sont identiques. Combien de résultats sont possibles?

Exercice 18. On tire 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes.

- 1. Combien de tirages sont possibles?
- 2. Combien de tirages ne contiennent que des coeurs?
- 3. Combien de tirages donnent un carré d'as?
- 4. Combien de tirages donnent un brelan (3 cartes identiques et 2 cartes différentes)?
- 5. Combien de tirages donnent une quinte floche royale (5 cartes qui se suivent, de 10 à l'as, de la même couleur)?
- 6. Combien de tirages donnent une quinte floche (5 cartes qui se suivent, de la même couleur)?
- 7. Combien de tirages donnent une quinte (5 cartes qui se suivent)?

Exercice 19.

- 1. Combien de tirages de 5 boules au loto parmi 50 boules sont possibles? Combien de ces tirages ne contiennent que des numéros pairs? Combien contiennent au moins un numéro pair?
- 2. Combien de combinaisons de cadenas de 4 chiffres, à valeurs entre 1 et 7, sont possibles?

Combien de ces combinaisons commencent par 17..?

Combien de ces combinaisons n'ont que des chiffres pairs?

Combien de ces combinaisons sont symétriques (de la forme abba)?

Combien de ces combinaisons contiennent 4 chiffres distincts?

- 3. Un glacier propose des coupes de 2,3 ou 4 boules de glace, avec 6 parfums disponibles.
 - Combien de coupes de glace différentes peut-on acheter?

Exercice 20.

Soit $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules de l'urne, l'une après l'autre, sans les remettre. On note Ω l'ensemble de tous les tirages possibles (vus comme des n-uplets).

- 1. Combien vaut $Card(\Omega)$?
- 2. On note A l'ensemble de tous les tirages qui contiennent la séquence "1, 2, 3" (les boules 1, 2, 3 sortent à la suite et dans cet ordre). Calculer Card(A).
 - On pourra faire des exemples pour de petites valeurs de n (n=3,4,5), pour s'aider.
- 3. On note B l'ensemble de tous les tirages tels que 1 apparaît avant 2, et tels que 2 apparaît avant 3 (on tire 1 avant 2, et on tire 2 avant 3). Calculer Card(A).

Exercice 21.

- 1. Pour $k \geq 0$ on définit $A_k = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \text{ t.q. } n + m = k\}$. Calculer $Card(A_k)$.
- 2. On pose $B_k = \{(n, m, l) \in \mathbb{N}^3 \text{ t.q. } n + m + l = k\}.$ Montrer que $B_k = \bigcup_{j=0}^k \{(n, m, j), \text{ t.q. } (n, m) \in A_{k-j}\}.$ Puis, calculer $Card(B_k)$.
- 3. Soit $n \ge 0$. On prend k cailloux, que l'on range en ligne. On sépare ces cailloux avec des bâtons pour former n tas.

Combien de bâtons faut-il pour former n tas?

- 4. Combien de dispositions des bâtons sont possibles pour former n tas de cailloux? (un tas peut être vide s'il n'y a pas de cailloux entre 2 bâtons) On fera des exemples pour k = 4, 5 et n = 2, 3.
- 5. On pose $C_{n,k} = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n \text{ t.q. } a_1 + a_2 + \dots + a_n = k\}$. Calculer $Card(C_{n,k})$.