

FEUILLE DE TD N° 5

Primitives et équations différentielles

■ Calculs directs de primitives/intégrales

Exercice 1.

- On a $\int_0^2 \frac{1}{4x+3} dx = \int_0^2 \frac{1}{4} \frac{4}{4x+3} dx = [\ln(|4x+3|)]_0^2$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $5+x^2 = 5(1+\frac{x^2}{5}) = 5(1+(\frac{x}{\sqrt{5}})^2)$. Ainsi, en posant $u = \frac{x}{\sqrt{5}}$, avec $du = \frac{dx}{\sqrt{5}}$, on a $\int_0^3 \frac{1}{5+x^2} dx = \int_0^{\frac{3}{\sqrt{5}}} \frac{1}{5(1+u^2)} \sqrt{5} du = [\frac{\sqrt{5}}{5} \arctan(u)]_0^{\frac{3}{\sqrt{5}}}$.
- En posant $u = \sin(x)$, avec $du = \cos(x)dx$, on a $\int (\cos(x)^2)^4 \cos(x) dx = \int (1 - \sin(x)^2)^4 \cos(x) dx = \int (1 - u^2)^4 du = \int (1 - 4u^2 + 6u^4 - 4u^6 + u^8) du = [u - \frac{4}{3}u^3 + \frac{6}{5}u^5 - \frac{4}{7}u^7 + \frac{1}{9}u^9] = [\sin(x) - \frac{4}{3}\sin(x)^3 + \frac{6}{5}\sin(x)^5 - \frac{4}{7}\sin(x)^7 + \frac{1}{9}\sin(x)^9]$
- On reconnaît une somme géométrique. On a ainsi : $\int_1^3 \frac{\exp(10x)-1}{\exp(x)-1} dx = \int_1^3 \sum_{k=0}^9 \exp(x)^k dx = \int_1^3 \sum_{k=0}^9 \exp(kx) dx = \int_1^3 1 + \sum_{k=1}^9 \exp(kx) dx = [x + \sum_{k=1}^9 \frac{\exp(kx)}{k}]_1^3$.

Attention, pour primitiver $x \mapsto \exp(\lambda x)$ ou $x \mapsto \cos(\lambda x)$ ou $\dots$, il faut séparer le cas $\lambda = 0$ qui donne une fonction constante.

Exercice 2 (Linéarisation).

- Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \cos(x)^2 \sin(x)$.
On pose $u = \cos(x)$, avec $du = -\sin(x)dx$. On a alors : $\int \cos(x)^2 \sin(x) dx = \int u^2 (-du) = [-\frac{1}{3}u^3] = [-\frac{\cos(x)^3}{3}]$.
- Déterminer une primitive de $g : x \mapsto \cos(2x) \sin(3x)$.
On a $\cos(2x) \sin(3x) = (\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2})(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i}) = \frac{1}{4i}(e^{5ix} - e^{-ix} + e^{ix} - e^{-5ix}) = \frac{1}{4i}(2i \sin(5x) + 2i \sin(-x)) = \frac{1}{2}(\sin(5x) - \sin(x))$.
Ainsi, on a $\int \cos(2x) \sin(3x) dx = \int \frac{1}{2}(\sin(5x) - \sin(x)) dx = [\frac{1}{2}(-\frac{1}{5} \cos(5x) + \cos(x))]$.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_1^8 \exp^{2x} \cos(x) dx$.
On a $\int_1^8 \exp^{2x} \cos(x) dx = \int_1^8 \operatorname{Re}(\exp((2+i)x)) dx = \operatorname{Re}(\int_1^8 \exp^{(2+i)x} dx) = \operatorname{Re}([\frac{1}{2+i} \exp((2+i)x)]_1^8)$.
Or, $\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{5}$.
Donc, $\frac{1}{2+i} \exp((2+i)x) = \frac{2-i}{5} \exp(2x)(\cos(x) + i \sin(x)) = \frac{\exp(2x)}{5}(2 \cos(x) + 2i \sin(x) - i \cos(x) - i^2 \sin(x))$.
Ainsi, $\int_1^8 \exp^{2x} \cos(x) dx = [\frac{\exp(2x)}{5}(2 \cos(x) + \sin(x))]_1^8$.
- $\int_0^1 \exp(-x) \sin(2x) dx$
On a $\int_0^1 \exp^{-x} \sin(2x) dx = \int_0^1 \operatorname{Im}(\exp((-1+2i)x)) dx = \operatorname{Im}(\int_0^1 \exp^{(-1+2i)x} dx) = \operatorname{Im}([\frac{1}{-1+2i} \exp((-1+2i)x)]_0^1)$.
Or, $\frac{1}{-1+2i} = \frac{-1-2i}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-1-2i}{5}$.
Donc, $\frac{1}{-1+2i} \exp((-1+2i)x) = \frac{-1-2i}{5} \exp(-x)(\cos(2x) + i \sin(2x)) = \frac{\exp(-x)}{5}(-\cos(2x) - i \sin(2x) + 2i \cos(2x) + 2i^2 \sin(2x))$.
Ainsi, $\int_0^1 \exp^{-x} \sin(2x) dx = [\frac{\exp(-x)}{5}(2 \cos(2x) - \sin(2x))]_0^1$.

■ Intégration par parties

Exercice 4.

- On a $\int_1^e x(\ln(x))^2 dx =_{IPP} [\frac{x^2}{2} \ln(x)^2]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} 2 \frac{\ln(x)}{x} dx = [\frac{x^2}{2} \ln(x)^2]_1^e - \int_1^e x \ln(x) dx =_{IPP} [\frac{x^2}{2} \ln(x)^2]_1^e - ([\frac{x^2}{2} \ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx) = [\frac{x^2}{2} \ln(x)^2]_1^e - ([\frac{x^2}{2} \ln(x)]_1^e - [\frac{x^2}{4}]_1^e) = [\frac{x^2}{2}(\ln(x)^2 - \ln(x) + \frac{1}{2})]_1^e$.
- On a $\int_1^2 (2x+1) \sin(3x) dx =_{IPP} [(2x+1) \frac{-1}{3} \cos(3x)]_1^2 - \int_1^2 2 \frac{-1}{3} \cos(3x) dx = [(2x+1) \frac{-1}{3} \cos(3x)]_1^2 + [\frac{2}{9} \sin(3x)]_1^2 = [(2x+1) \frac{-1}{3} \cos(3x) + \frac{2}{9} \sin(3x)]_1^2$.

■ Changement de variable

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes en effectuant les changements de variables suggérés.

- On pose $u = \cos(t)$, avec $du = -\sin(t)dt$. On a $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2t)}{(1+\cos(t))^2} dt =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(t)\sin(t)}{(1+\cos(t))^2} dt = \int_{\cos(0)}^{\cos(\frac{\pi}{3})} \frac{-2u}{(1+u)^2} du.$$
Et, $\int u \frac{1}{(1+u)^2} du = IPP [u \frac{-1}{1+u}] - \int 1 \frac{-1}{1+u} du = [\frac{-u}{1+u}] + [\ln(|1+u|)] = [\frac{-u}{1+u} \ln(|1+u|)].$
Ainsi, $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2t)}{(1+\cos(t))^2} dt = [\frac{-\cos(t)}{1+\cos(t)} \ln(|1+\cos(t)|)]_0^{\frac{\pi}{3}}.$
- On pose $u = 2x + 1$, avec $du = 2dx$, $x = \frac{u-1}{2}$. On a : $\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx =$

$$\int_1^5 \frac{u-1}{2} \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{du}{2} = \int_1^5 \frac{1}{4} (\frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}}) du = [\frac{1}{4} (\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{u})]_1^5.$$

■ Résolution d'équations différentielles

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes.

- (E_1) : Sur $\mathbb{R}$, $y' - 3y = 0$.
Une primitive de $a : x \mapsto -3x$ est $A : x \mapsto -\frac{3}{2}x^2$.
Ainsi, $y \in C^1(\mathbb{R})$ est une solution de (E_1) ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda e^{-A} = x \mapsto \lambda e^{\frac{3}{2}x^2}$.
- (E_2) : Sur $\mathbb{R}$, $y' - \cos y = 0$.
Une primitive de $a : x \mapsto -\cos(x)$ est $A : x \mapsto -\sin(x)$.
Ainsi, $y \in C^1(\mathbb{R})$ est une solution de (E_2) ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda e^{-A} = x \mapsto \lambda e^{\sin(x)}$.
- (E_3) : Sur $\mathbb{R}$, $y' - \cos y = \cos$.
Une primitive de $a : x \mapsto -\cos(x)$ est $A : x \mapsto -\sin(x)$.
Pour $b = \cos$, on cherche une primitive de $b e^A$, selon la méthode de variation de la constante.
On a $\int b(x) e^{A(x)} dx = \int \cos(x) \exp(-\sin(x)) dx = [-\exp(-\sin(x))].$
Donc $g : x \mapsto -\exp(-\sin(x))$ est une primitive de $b.e^A$.
Ainsi, $y \in C^1(\mathbb{R})$ est une solution de (E_3) ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = g.e^{-A} + \lambda e^{-A} = x \mapsto -1 + \lambda e^{\sin(x)}$.
- (E_4) : Sur $\mathbb{R}$, $y' + 2y = \sin$.
Une primitive de $a : x \mapsto 2$ est $A : x \mapsto 2x$.
Pour $b = \sin$, on cherche une primitive de $b e^A$, selon la méthode de variation

de la constante.

On a $\int b(x) e^{A(x)} dx = \int \sin(x) \exp(2x) dx$.

Et, $\int \sin(x) \exp(2x) dx = Im(\int \exp((2+i)x) dx) = Im([\frac{1}{2+i} \exp((2+i)x)]) = Im([\frac{2-i}{5} \exp(2x)(\cos(x) + i \sin(x))]) = [\frac{\exp(2x)}{5} (2 \sin(x) - \cos(x))].$

Donc $g : x \mapsto \frac{\exp(2x)}{5} (2 \sin(x) - \cos(x))$ est une primitive de $b.e^A$.

Ainsi, $y \in C^1(\mathbb{R})$ est une solution de (E_4) ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = g.e^{-A} + \lambda e^{-A} = x \mapsto \frac{1}{5} (2 \sin(x) - \cos(x)) + \lambda e^{-2x}$.

- (E_5) : Sur $\mathbb{R}$, $y' - \exp y = 2 \exp$.

Une primitive de $a : x \mapsto -\exp(x)$ est $A : x \mapsto -\exp(x)$.

La fonction $f_p : x \mapsto -2$ est une solution particulière de (E_5) .

Ainsi, $y \in C^1(\mathbb{R})$ est une solution de (E_5) ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = f_p + \lambda e^{-A} = x \mapsto -2 + \lambda e^{\exp(x)}$.