

Cycle 2 : Approfondissements 1

TD 9 Engin flottant mobile de franchissement de voie fluviale Loi E/S par la fermeture géométrique

Le contexte et les informations nécessaires sont dans le TD 7.1.

L'étude proposée porte sur la **vérification des choix d'implantation des actionneurs** conçus pour assurer le déploiement des passerelles visibles pages 6 et 7 (le schéma cinématique est en couleur sur le Drive) :

- le déploiement de la passerelle 5 est réalisé grâce à deux **vérins hydrauliques Ve(1+2) et Vi (3+4)**.
- Le déploiement de la passerelle 9 est réalisé grâce à un **moteur hydraulique M (6+7)** et un système vis-écrou.

On donne :

$\overrightarrow{AB} = \lambda_2 \cdot \vec{y}_2$	$\theta_1 = (\vec{x}_0; \vec{x}_1)$	$\theta_m = (\vec{y}_6; \vec{y}_7)$	$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = d \cdot \vec{x}_5; \overrightarrow{AC} = d \cdot \vec{x}_0 + a \cdot \vec{y}_0$
$\overrightarrow{ED} = \lambda_4 \cdot \vec{y}_4$	$\theta_3 = (\vec{x}_0; \vec{x}_3)$	$\theta_9 = (\vec{x}_5; \vec{x}_9)$	$\overrightarrow{CE} = d \cdot \vec{x}_0 - b \cdot \vec{y}_0; \overrightarrow{DG} = d \cdot \vec{x}_5 + e \cdot \vec{y}_5$
$\overrightarrow{GH} = \lambda_8 \cdot \vec{x}_8$	$\theta_5 = (\vec{x}_0; \vec{x}_5)$	$\theta_6 = (\vec{x}_5; \vec{x}_6)$	$\overrightarrow{DF} = L \cdot \vec{x}_5; \overrightarrow{FH} = d \cdot \vec{x}_9; \overrightarrow{FK} = L \cdot \vec{x}_9$

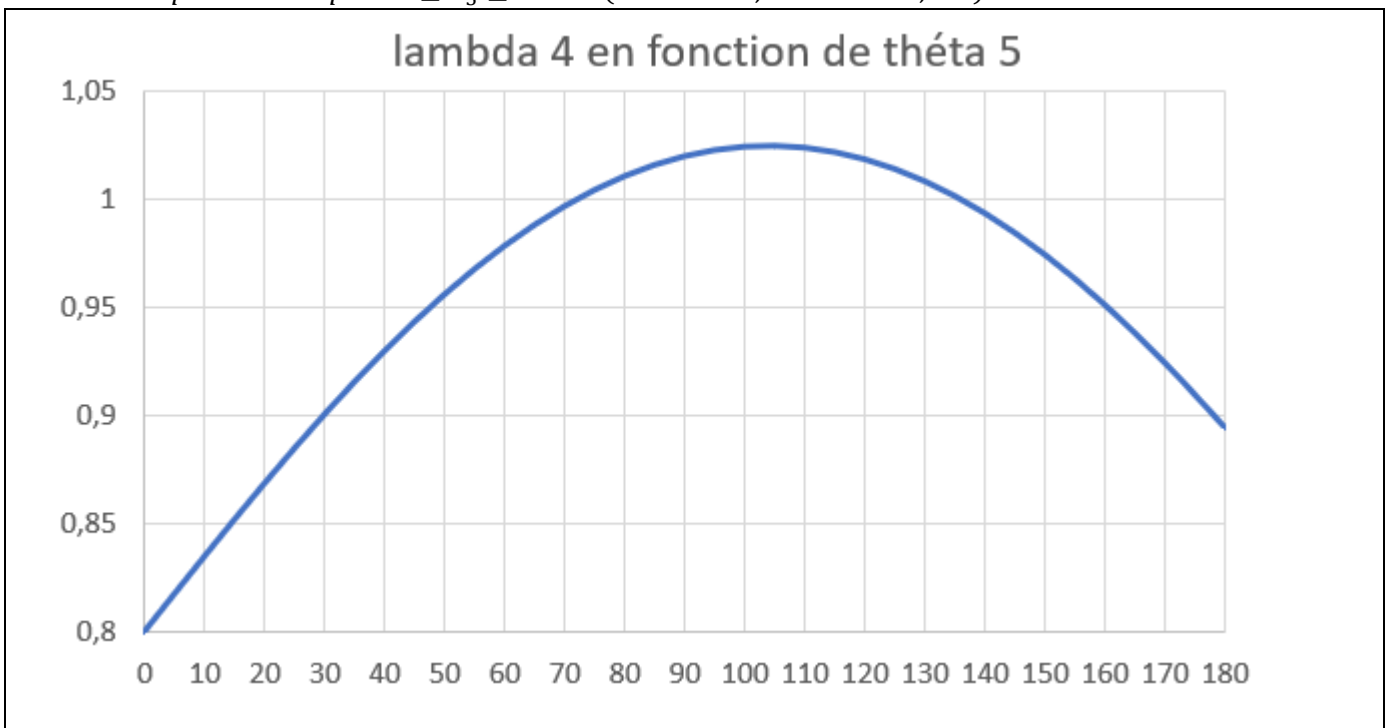
Déploiement de la passerelle 5 ($\theta_5(t=0) = 0^\circ; \theta_5(t=30) = 180^\circ$)

Loi d'entrée-sortie de l'actionneur Vi : $\lambda_4 = f^{-1}(\theta_5)$

Q0. Identifier l'entrée et la sortie pour cette chaîne cinématique

Q1. Ecrire une fermeture géométrique qui permette d'obtenir le modèle géométrique direct (MGI) $\lambda_4 = f^{-1}(\theta_5)$

La courbe représentative pour $0 \leq \theta_5 \leq 180^\circ$ (avec $d = 0,2 \text{ m}$ et $b = 0,8 \text{ m}$) est la suivante :



Q2. La courbe obtenue présente un maximum noté $(\theta_{5i \text{ crit}}; \lambda_{4 \text{ crit}})$. En analysant le schéma cinématique, indiquer à quelle configuration particulière correspond $\theta_{5i \text{ crit}}$. Montrer que la fermeture géométrique peut aussi s'écrire :

$$\cos(\theta_5 + \varphi_i) = \frac{\lambda_4^2 - 2 \cdot d^2 - b^2}{-2 \cdot d \cdot \sqrt{d^2 + b^2}} \text{ et préciser les valeurs de } \lambda_{4 \text{ crit}}; \theta_{5i \text{ crit}} \text{ et } \varphi_i.$$

Q3. Considérant le domaine de variation de θ_5 , quelle précaution doit-on prendre pour avoir le modèle géométrique inverse (MGD) $\theta_5 = f(\lambda_4)$? Préciser cette relation.

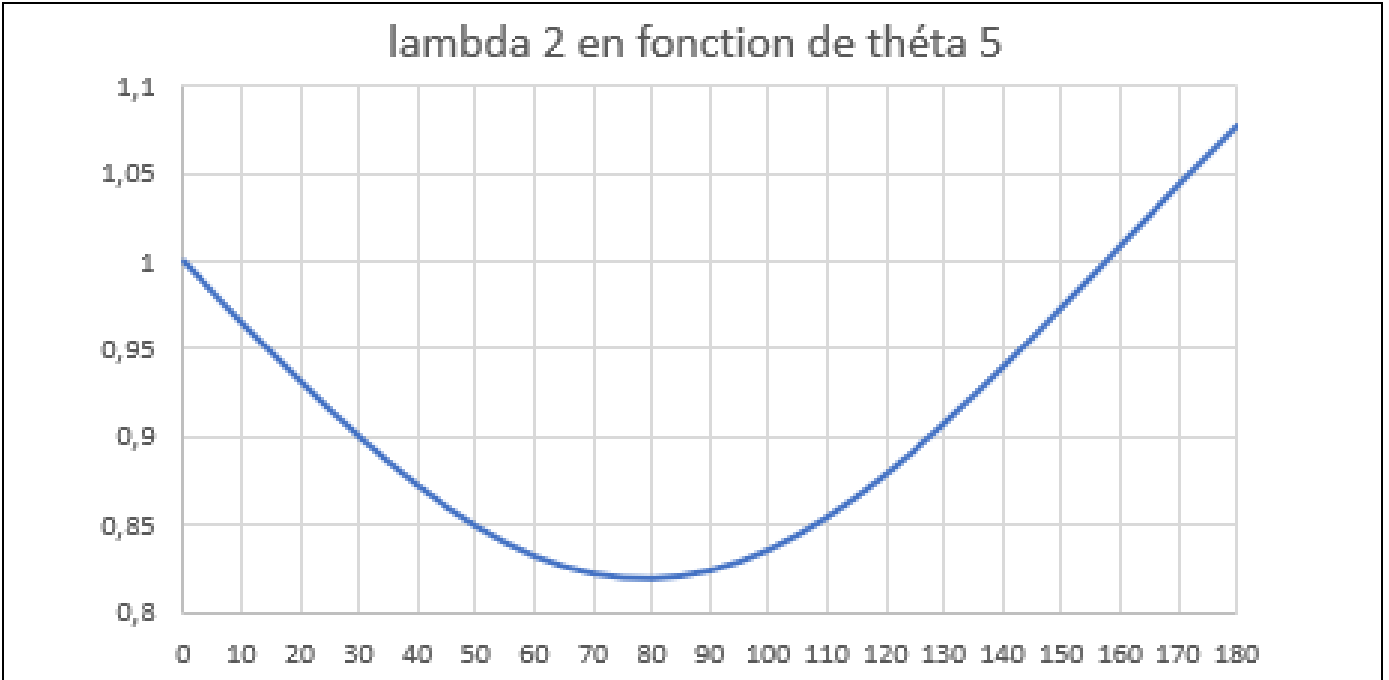
Cycle 2 : Approfondissements 1

La présence de cette singularité géométrique crée une incertitude sur la suite du mouvement de la passerelle 5. En effet, après $\theta_5 = \theta_{5i\text{ crit}}$, la tige du vérin **Vi** doit re-renter mais on ne sait pas si la passerelle 5 va continuer dans les θ_5 croissants ou décroissants. *En effet, la fonction f n'est pas une bijection et certain λ_4 ont deux antécédents θ_5 .* Cette singularité justifie la présence du vérin **Ve** qui, par la sortie de sa tige, va imposer que θ_5 continue de croître. La rotation de la passerelle 5 est donc dans un premier temps, pour $\theta_5 < \theta_{5i\text{ crit}}$, contrôlée par le vérin **Vi** (phase de sortie de la tige 4) puis dans un second temps (avant que $\theta_5 = \theta_{5i\text{ crit}}$), contrôlée par le vérin **Ve** (phase de sortie de la tige 1).

Loi d'entrée-sortie de l'actionneur V_e : $\lambda_2 = g^{-1}(\theta_5)$

Q4. Ecrire une fermeture géométrique qui permette d'obtenir le modèle géométrique direct (MGI) $\lambda_2 = g^{-1}(\theta_5)$

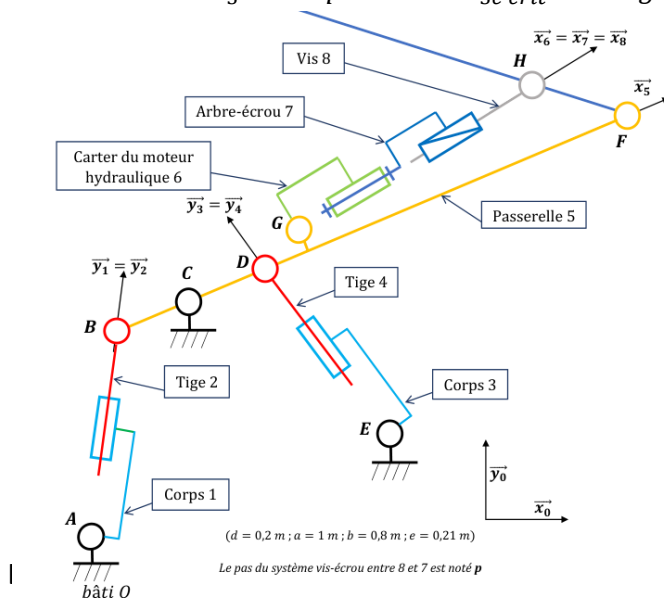
La courbe représentative pour $0 \leq \theta_5 \leq 180^\circ$ (avec $d = 0,2 \text{ m}$ et $a = 1 \text{ m}$) est la suivante :



Q5. La courbe obtenue présente un minimum noté $(\theta_{5e\text{ crit}}; \lambda_{2\text{ crit}})$. En analysant le schéma cinématique, indiquer à quelle configuration particulière correspond $\theta_{5e\text{ crit}}$. Calculer $\lambda_{2\text{ crit}}$ et donner un ordre de grandeur de $\theta_{5e\text{ crit}}$ (lecture de la courbe).

Q6. Quelle condition faut-il imposer à $\theta_{5i \text{ crit}}$ et $\theta_{5e \text{ crit}}$ pour que le déploiement de la passerelle 5 soit maîtrisé ? Est-ce vérifié ? Conclure sur le choix d'implantation des actionneurs V_i et V_e .

Q7. Préciser la relation du modèle géométrique inverse (MGD) $\theta_5 = g(\lambda_2)$ en prenant les précautions nécessaires au vu du domaine de variation de θ_5 . Vous préciserez $\theta_{5e\text{crit}}$ et l'angle φ_e (par analogie avec les questions précédentes).



TD 9 Engin flottant

Déploiement de la passerelle 5 ($\theta_5(t=0) = 0^\circ$; $\theta_5(t=30) = 180^\circ$)

Loi d'entrée-sortie de l'actionneur Vi : $\lambda_4 = f(\theta_5)$

Q0. Identifier l'entrée et la sortie.

Sur les deux paramètres sont λ_4 et θ_5 ; λ_4 correspond au paramètre caractérisant le vérin (coordonnée articulaire), donc c'est l'entrée. θ_5 est bien la sortie car cela caractérise la position angulaire au niveau effecteur (coordonnée opérationnelle).

Remarque : en souhaitant exprimer λ_4 en fonction de θ_5 on fournit alors le modèle géométrique **indirect**

Q1. Ecrire une fermeture géométrique qui permette d'obtenir le modèle géométrique inverse (MGI) $\lambda_4 = f(\theta_5)$

Cherche à écrire la bonne **fermeture géométrique** où on veut $\lambda_4 = \lambda_4(\theta_5)$

- 1 : il faut forcément $\overrightarrow{ED}$ pour faire intervenir λ_4 (et il nous reste θ_5 à faire intervenir où θ_5 est l'angle entre $\vec{x}_5$ et $\vec{x}_0$)
- 2 : dans les autres vecteurs de la paramétrisation fournie, seul $\overrightarrow{CE}$ fait intervenir le point E
- 3 : donc on peut commencer à écrire $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \dots$ et si on fait le plus simple à savoir finir par $\overrightarrow{CD}$ est-ce que ça marche ? ... oui c'est bon car $\overrightarrow{CD} = d \cdot \vec{x}_5$ donc est selon $\vec{x}_5$ et que $\overrightarrow{EC}$ est selon $\overrightarrow{EC}$ la base B_0

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \lambda_4 \cdot \vec{y}_4 = -d \cdot \vec{x}_0 + b \cdot \vec{y}_0 + d \cdot \vec{x}_5$$

Et, comme $\vec{x}_5 = \cos(\theta_5) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\theta_5) \cdot \vec{y}_0$

On en déduit une relation exprimée dans deux bases :

$$\lambda_4 \cdot \vec{y}_4 = (-d + d \cdot \cos(\theta_5)) \cdot \vec{x}_0 + (b + d \cdot \sin(\theta_5)) \cdot \vec{y}_0$$

⚠ ne pas projeter $\vec{y}_4$!!! car sinon cela ferait intervenir d'autre(s) angle(s), ce que l'on ne veut pas

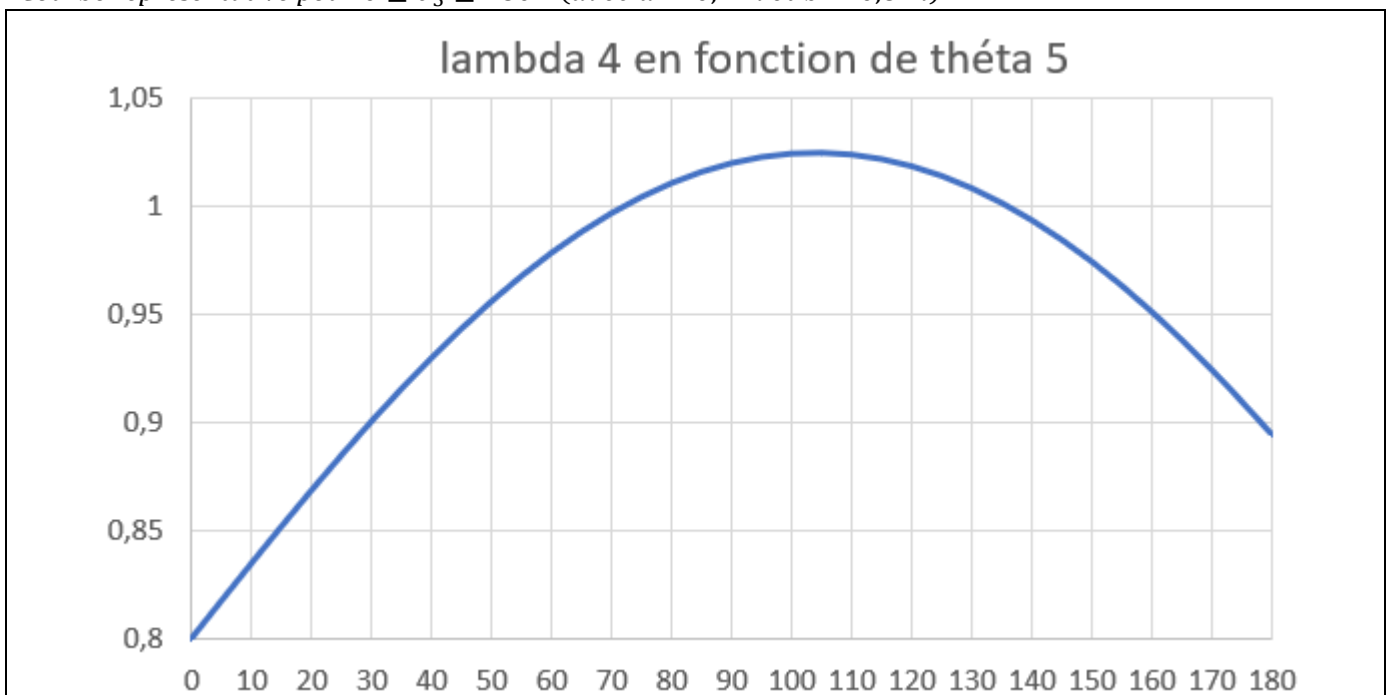
=> calcul de la **norme** :

$$\lambda_4^2 = (-d + d \cdot \cos(\theta_5))^2 + (b + d \cdot \sin(\theta_5))^2$$

Finalement, le MGD est :

$$\lambda_4 = \sqrt{(-d + d \cdot \cos(\theta_5))^2 + (b + d \cdot \sin(\theta_5))^2}$$

Courbe représentative pour $0 \leq \theta_5 \leq 180$ (avec $d = 0,2 \text{ m}$ et $b = 0,8 \text{ m}$).



Q2. La courbe obtenue présente un maximum noté $(\theta_{5i \text{ crit}} ; \lambda_{4 \text{ crit}})$. En analysant le schéma cinématique, indiquer à quelle configuration particulière correspond $\theta_{5i \text{ crit}}$. Montrer que la fermeture géométrique peut aussi s'écrire :

$$\cos(\theta_5 + \varphi_i) = \frac{\lambda_4^2 - 2.d^2 - b^2}{-2.d.\sqrt{d^2 + b^2}} \text{ et préciser les valeurs de } \lambda_{4 \text{ crit}} ; \theta_{5i \text{ crit}} \text{ et } \varphi_i.$$

Ce maximum correspond à l'**alignement des points** (dans l'ordre) **E, C et B**. La tige ne peut pas sortir davantage et d'après la courbe : $\theta_{5i \text{ crit}} \approx 105^\circ$ et $\lambda_{4 \text{ crit}} \approx 1,025m$

On veut exprimer θ_5 en fonction de λ_4 (modèle géométrique **direct**). Donc il suffit de reprendre le calcul de la norme effectué en Q1 pour isoler θ_5 et obtenir $\theta_5 = \theta_5(\lambda_4)$:

$$\begin{aligned} \lambda_4^2 - 2.d^2 - b^2 &= -2.d.(d.\cos(\theta_5) - b.\sin(\theta_5)) \\ \Leftrightarrow \lambda_4^2 - 2.d^2 - b^2 &= -2.d.\sqrt{d^2 + b^2}.(\frac{d}{\sqrt{d^2 + b^2}}.\cos(\theta_5) - \frac{b}{\sqrt{d^2 + b^2}}.\sin(\theta_5)) \\ \Leftrightarrow \lambda_4^2 - 2.d^2 - b^2 &= -2.d.\sqrt{d^2 + b^2}.\cos(\theta_5 + \varphi_i) \text{ avec } \varphi_i = \arctan(\frac{b}{d}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\cos(\theta_5 + \varphi_i) = \frac{\lambda_4^2 - 2.d^2 - b^2}{-2.d.\sqrt{d^2 + b^2}}} \text{ avec } \boxed{\varphi_i = \arctan(\frac{b}{d})} \quad \text{CQFD}$$

$$\text{A.N. } \boxed{\varphi_i = 1,326 \text{ rad } (75,96^\circ)}$$

Lorsque les points sont alignés, on a $\lambda_{4 \text{ crit}} = \sqrt{d^2 + b^2} + d = \boxed{1,024 \text{ m}}$ (voir schéma cinématique) et en remplaçant dans la relation donnée dans l'énoncé, on a $\cos(\theta_{5i \text{ crit}} + \varphi_i) = -1$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \theta_{5i \text{ crit}} + \varphi_i &= \pi \\ \Leftrightarrow \theta_{5i \text{ crit}} &= \pi - \varphi_i = 180 - 75,96 = \boxed{104,04^\circ} \end{aligned}$$

On retrouve bien la valeur de la courbe !

Q3. Considérant le domaine de variation de θ_5 , quelle précaution doit-on prendre pour avoir le modèle géométrique inverse (MGI) $\theta_5 = f^{-1}(\lambda_4)$? Préciser cette relation.

La fonction arccos renvoie des valeurs dans l'intervalle $[0; \pi]$. Il faut donc vérifier que $\theta_5 + \varphi_i$ est dans cet intervalle, ce qui est le cas jusqu'à $\theta_5 = \theta_{5i \text{ crit}}$.

$$\theta_5 = \arccos\left(\frac{\lambda_4^2 - 2.d^2 - b^2}{-2.d.\sqrt{d^2 + b^2}}\right) - \varphi_i \text{ pour } \lambda_4 \leq \lambda_{4 \text{ crit}}$$

La présence de cette singularité géométrique crée une incertitude sur la suite du mouvement de la passerelle 5. En effet, après $\theta_5 = \theta_{5i \text{ crit}}$, la tige du vérin **Vi** doit re-renter mais on ne sait pas si la passerelle 5 va continuer dans les θ_5 croissants ou décroissants. En effet, la fonction f n'est pas une bijection et certains λ_4 ont deux antécédents θ_5 . Cette singularité justifie la présence du vérin **Ve** qui, par la sortie de sa tige, va imposer que θ_5 continue de croître. La rotation de la passerelle 5 est donc dans un premier temps, pour $\theta_5 < \theta_{5i \text{ crit}}$, contrôlée par le vérin **Vi** (phase de sortie de la tige 4) puis dans un second temps (avant que $\theta_5 = \theta_{5i \text{ crit}}$), contrôlée par le vérin **Ve** (phase de sortie de la tige 1).

Loi d'entrée-sortie de l'actionneur Ve : $\lambda_2 = g(\theta_5)$

Q4. Ecrire une fermeture géométrique qui permette d'obtenir le modèle géométrique inverse (MGI) $\lambda_2 = g(\theta_5)$

On a la fermeture géométrique suivante : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \lambda_2.\vec{y}_2 = d.\vec{x}_0 + a.\vec{y}_0 - d.\vec{x}_5$

Même raisonnement que précédemment :

$$\lambda_2.\vec{y}_1 = (d - d.\cos(\theta_5)).\vec{x}_0 + (a - d.\sin(\theta_5)).\vec{y}_0$$

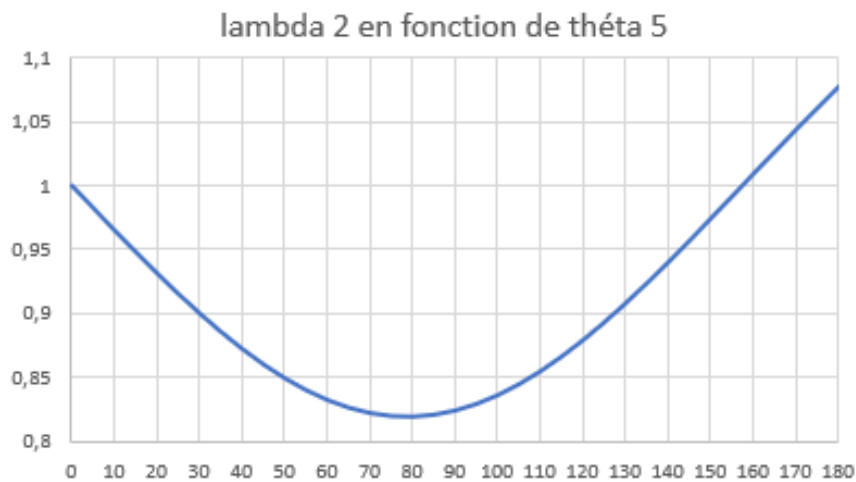
Le calcul de la norme donne :

$$\lambda_2^2 = (d - d.\cos(\theta_5))^2 + (a - d.\sin(\theta_5))^2$$

Finalement, le MGD est :

$$\lambda_2 = \sqrt{(d - d.\cos(\theta_5))^2 + (a - d.\sin(\theta_5))^2}$$

Courbe représentative pour $0 \leq \theta_5 \leq 180^\circ$ (avec $d = 0,2 \text{ m}$ et $a = 1 \text{ m}$).



Q5. La courbe obtenue présente un minimum noté $(\theta_{5e\text{ crit}} ; \lambda_{2\text{ crit}})$. En analysant le schéma cinématique, indiquer à quelle configuration particulière correspond $\theta_{5e\text{ crit}}$. Calculer $\lambda_{2\text{ crit}}$ et donner un ordre de grandeur de $\theta_{5e\text{ crit}}$ (lecture de la courbe).

Ce minimum correspond à l'alignement des points (dans l'ordre) A, B et C. La tige 1 ne peut pas rentrer davantage et $\theta_5 \approx 80^\circ$ (la passerelle 5 a fait moins d'un quart de tour).

Lorsque les points sont alignés, on a $\lambda_{2\text{ crit}} = \sqrt{d^2 + a^2} - d = 0,82\text{ m}$ (voir schéma cinématique)

Q6. Quelle condition faut-il imposer à $\theta_{5i\text{ crit}}$ et $\theta_{5e\text{ crit}}$ pour que le déploiement de la passerelle 5 soit maîtrisé ? Est-ce vérifié ? **Conclure sur le choix d'implantation des actionneurs Vi et Ve.**

Pour que la passerelle 5 soit déployée de façon maîtrisée, il faut que les angles critiques vérifient :

$$\theta_{5e\text{ crit}} < \theta_{5i\text{ crit}}$$

(avec une marge de sécurité pour qu'il y ait chevauchement des plages de pilotage)

Le chevauchement est de l'ordre de 25° ($\theta_{5i\text{ crit}} - \theta_{5e\text{ crit}}$). Le choix d'implantation des actionneurs Vi et Ve est satisfaisant.

Q7. Préciser la relation du modèle géométrique inverse (MGI) $\theta_5 = g^{-1}(\lambda_2)$ en prenant les précautions nécessaires au vu du domaine de variation de θ_5 . Vous préciserez $\theta_{5e\text{ crit}}$ et l'angle φ_e (par analogie avec la Q5).

Un calcul similaire à Q2 donne :

$$\lambda_2^2 - 2 \cdot d^2 - a^2 = -2 \cdot d \cdot \sqrt{d^2 + a^2} \cdot \left(\frac{d}{\sqrt{d^2 + a^2}} \cdot \cos(\theta_5) + \frac{a}{\sqrt{d^2 + a^2}} \cdot \sin(\theta_5) \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta_5 - \varphi_e) = \frac{\lambda_2^2 - 2 \cdot d^2 - a^2}{-2 \cdot d \cdot \sqrt{d^2 + a^2}} \quad \text{avec } \varphi_e = \arctan\left(\frac{a}{d}\right) \text{ et } \varphi_e = 78,69^\circ$$

Lorsque les points sont alignés, on a $\lambda_{2\text{ crit}} = \sqrt{d^2 + a^2} - d = 0,82\text{ m}$ (voir schéma cinématique) et en remplaçant dans la relation ci-dessus, on a $\cos(\theta_{5e\text{ crit}} - \varphi_e) = 1$

$$\Leftrightarrow \theta_{5e\text{ crit}} - \varphi_e = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_{5e\text{ crit}} = \varphi_e \quad (78,69^\circ)$$

La fonction arccos renvoie des valeurs dans l'intervalle $[0; \pi]$. Il faut donc vérifier que $\theta_5 - \varphi_e$ est dans cette intervalle, ce qui est le cas pour $\theta_5 \geq \theta_{5e\text{ crit}}$ (θ_5 croissant).

$$\theta_5 = \text{Arccos}\left(\frac{\lambda_2^2 - 2 \cdot d^2 - a^2}{-2 \cdot d \cdot \sqrt{d^2 + a^2}}\right) + \varphi_e \quad \text{pour } \lambda_2 \geq \lambda_{2\text{ crit}}$$

Remarque : il existe un autre point critique pour l'alignement A, C, B mais $\theta_5 = 180^\circ$ est atteint avant.