Feuille de TD n° 7

Suites

Suites récurrentes

Exercice 1.

1. Donner une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ croissante et convergente.
2. Donner une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ décroissante et convergente.
3. Donner une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ convergente mais pas monotone.
4. Donner une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui tend vers $+\infty$.
5. Donner une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui tend vers $+\infty$ mais qui n'est pas croissante.
6. Donner une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui n'a pas de limite quand $n \to +\infty$.
7. Donner une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui n'a pas de limite, et qui est non-majorée.
8. Donner une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ qui n'a pas de limite, qui est bornée, et qui n'est pas périodique.

Exercice 2. Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{R}$. Calculer le terme général de $(u_n)_{n\geq 0}$ pour :

1. $u_0 = 1$,
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.
2. $u_0 = u_1 = 1$,
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \cos(\theta)u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$
   $\forall n \in [\![2, +\infty[\![$, $u_n + u_{n-1} + u_{n-2} = 0$.
4. $u_0 = 2$, $u_1 = 5$,
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
5. $u_0 = 3$,
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
6. $u_0 = 2$,
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n$.
7. $u_0 = a$,,
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = bu_n^2$.

Encadrement

Exercice 3. Est-ce que le produit de deux suites minorées est une suite minorée ? Est-ce que le produit de deux suites majorées et négatives est une suite majorée ?

Exercice 4. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante à partir d'un certain rang s'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $(u_n)_{n\geq n_1}$ est croissante.
Montrer qu'une telle suite est minorée. On s'aidera d'une disjonction de cas par rapport à n_1.

Exercice 5. Soit $q \in \mathbb{R}$ avec $q \neq 1$. Soit $n \geq 0$.

1. Calculer $(1-q)\sum_{k=0}^{n} k.q^k$.
   On pourra utiliser le changement de variables $r = k+1$.
2. En déduire une expression de $u_n = \sum_{k=0}^{n} k.q^k$.
3. Déterminer pour quelles valeurs de q la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, ainsi que la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ lorsqu'elle existe.

Monotonie

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. On suppose que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $u_n - u_k \geq 0$.
2. Montrer que l'on a $nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k \geq 0$.
3. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
4. On suppose maintenant que $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est plus croissante, mais converge vers 0.
   Rappeler la définition de la convergence vers 0.
5. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|\sum_{k=n_0}^{n} u_k| < \frac{\epsilon}{2}(n - n_0 + 1)$.
   On utilisera intelligemment la question précédente.
6. Montrer qu'il existe n_1 tel que pour $n \geq n_1$ on a $\frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{n_0} u_k| < \frac{\epsilon}{2}$. On fera atention aux indices des sommes.
7. En utilisant un découpage en deux, montrer que $v_n \to_{n\to+\infty} 0$.
8. Montrer que la réciproque est fausse : Trouver une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ qui ne converge pas mais telle que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ et on considère l'équation $f_n(x) = 0$.

1. Démontrer qu'il existe une unique racine positive a_n à cette équation. On pourra étudier les fonctions f_n pour $n \geq 1$.

2. Montrer que $f_{n+1}(a_n) \geq 0$. Puis, montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.
   Indice : Calculer $a_n^{n+1} - 1$.

Limites de suites

Exercice 8. Déterminer la limite des suites $(u_n)_{n\geq n_0}$ de terme général :

1. $u_n = \frac{n^2}{\ln(n)}$
2. $u_n = \sqrt{n} - n^{\frac{1}{3}}$
3. $u_n = \frac{n^7}{(n+1)^7}$
4. $u_n = \frac{n!}{n^2}$
5. $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+4}}$
   On utilisera une quantité conjuguée.
6. $u_n = \frac{\sqrt{n}2^n - e^n n^2}{3^n}$
7. $u_n = \frac{5^{2n}}{4^{4n}}$
8. $u_n = -n^5 + 10n^4 + 150000n$
9. $u_n = n^{100}2^n - \ln(n)n!$

Exercice 9. Montrer que la suite de terme général
$u_n = \dfrac{5n^2 + \sin n}{3(n+2)^2\cos(\frac{n\pi}{5})}$ est divergente.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles définies par
$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.
Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

Exercice 11. Soient u et v les suites définies pour tout $n \geq 0$ par
$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$.
Montrer que la suite complexe $(u_n + iv_n)_{n\geq 0}$ est géométrique.
Déterminer sa raison r.
En déduire des expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. Soit $l \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.
   Montrer que $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers l.
   On utilisera la définition de la convergence.
2. On suppose que $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers l.
   Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers l.
3. Soit $n \geq 1$. On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n}$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

Pour aller plus loin

Exercice 13. On considère deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n! \times n}$$

1. Montrer que les deux suites u et v sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est un nombre irrationnel.
   Indice : Raisonner par l'absurde.
3. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, déterminer en fonction de l la limite de la suite de terme général :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{ak + b}{k!}$$

Exercice 14. On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ qui vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - (n+1)u_n = 2^n(n+1)!.$$

Déterminer une expression de u_n en fonction de n.
Indice : Poser la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n!}$.

Exercice 15.

1. On définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par : $x_0 > 0$ et, $\forall n \geq 0$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.
   (a) Déteminer la limite de $(x_n)_{n\geq 0}$.
   (b) Montrer que $(x_{n+1}^2 - x_n^2)_{n\geq 0}$ tend vers une limite finie, et déterminer cette limite.
   (c) Quelle est la limite de $(\frac{1}{x_n^2})_{n\geq 0}$?
2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et donner sa limite.

Exercice 16. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3.5^k}{k!}$.

1. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle monotone ?
2. Montrer que $\frac{n^3.5^n}{n!}.2^n \to_{n\to+\infty} 0$.
3. En déduire qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\frac{n^3.5^n}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq n_0$ on a $\sum_{k=n_0}^{n} \frac{k^3.5^k}{k!} \leq 2$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée. On précisera le majorant M.
   On pourra utiliser la première question.
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.