Feuille de TD n° 11

Polynômes

Exercice 1.
Développer les sommes et produits suivants :

1. $(X^3 - X^2 + X - 1).(X^2 + 1)$
2. $(X-1)(X-2)(X+3)$
3. $(2+X)(2+X)(2+X)(2+X)$
4. $X(X-1)(X-2) - (X-1)(X-2)(X-3)$
5. $(X-(1+i))^2(X-(1-i))^2$
6. $1 + X.(2 + X.(3 + X.(4 + X.(5 + X))))$
7. $(X-1)^n - (X+1)^n$, pour $n \geq 0$

Exercice 2.
Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. $X^3 - X^2 + X - 1$ par $X + 1$
2. $X^4 - 3X^3 + 2$ par $X^2 + 2$
3. $3X^5 + 2X^2 + X - 4$ par $X^2 + X + 1$
4. $X^n - 1$ par $X - 1$, pour $n \geq 1$

Exercice 3.
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ (degré, coefficients).
A l'aide de ces informations, montrer que l'on a $(X - a) \mid P(X)$ si et seulement si $P(a) = 0$.

Exercice 4.
Soient $a, b \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Montrer que l'on a $(X-a)(X-b) \mid P$ si et seulement si $P(a) = P(b) = 0$.
On pourra s'aider de l'exercice précédent.

Exercice 5.
• Résoudre dans $\mathbb{K}[X]$ l'équation : $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
On posera $n = \deg(P)$, et on calculera $\deg(P(X^2))$.
Puis on regardera les coefficients de P pour obtenir un système linéaire à résoudre.
• Résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation : $P(X^2) = P(X)^2$.
On montrera, en utilisant le cours sur les racines, que si P possède une racine λ alors on doit avoir $\lambda = 0$.

Exercice 6.

1. Donner un polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $R(1) = 0$ et $R(2) = 0$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Donner l'écriture de P.
3. On suppose que $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$.
   Trouver toutes les valeurs de P possibles.
4. Montrer que le polynôme P est de la forme $P(X) = (X-1) + (X-1)(X-2)Q(X)$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 (Coefficients-racines)**.**

1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a + b = 2$ et $a^2 + b^2 = 1$.
   Sans calculer les valeurs de a et b, déterminer ab.
2. Soient $c, d \in \mathbb{C}$ tels que $c + d = 5$ et $cd = 1$.
   Sans calculer les valeurs de a et b, déterminer $c^3 + d^3$.

Exercice 8. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré 3. On suppose que P n'a pas de racines dans $\mathbb{K}$.
Montrer alors que P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 9.
Factoriser les polynômes suivants.
S'ils ont des racines, lister leurs racines.
Dire si le polynôme est irréductible, scindé, à racines simples.

1. $3X^2 + 2$ dans $\mathbb{R}[X]$

2. $X^2 - 3X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
3. $X^3 - 3X^2 - X + 3$ dans $\mathbb{R}[X]$
4. $X^3 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
   Pour $\mathbb{C}[X]$ on utilisera le cours sur les nombres complexes.
5. $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
   Pour $\mathbb{R}[X]$, on pourra utiliser $2X^2$ pour faire apparaître un carré.
   Pour $\mathbb{C}[X]$ on pourra utiliser (-1) pour faire apparaître un carré.
6. $X^n - z^n$ dans $\mathbb{C}[X]$, pour $z \neq 0$ et $n \geq 1$.

Exercice 10.
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(2) = 6$, $P'(2) = 1$, $P''(2) = 4$, et $P^(k)(2) = 0$ pour tout $k \geq 3$.

Exercice 11 ((Interpolation))**.**

1. Trouver un polynome $P_1 \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_1(0) = 0$, $P_1(1) = 0$, $P_1(2) = 1$.
2. Trouver un polynome $P_2 \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_2(0) = 0$, $P_2(1) = 1$, $P_2(2) = 0$.
3. Trouver un polynome $P_3 \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_3(0) = 1$, $P_3(1) = 0$, $P_3(2) = 0$.
4. Trouver un polynome $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0) = 10$, $P(1) = 9$, $P(2) = 8$.

Exercice 12. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^2 - 2X\cos(n\theta) + 1$.
Écrire la relation obtenue pour $X = 1$.

Exercice 13 ((Développement))**.** Soit $n \geq 1$.
Développer le polynôme : $P(X) = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4)\dots(1 + X^{2^{n-1}})$.

Exercice 14. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ non-nul. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ on pose $r(P)$ le reste dans la division euclidienne de P par Q.

1. Rappeler le théorème de division euclidienne.
2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $r(\lambda P) = \lambda r(P)$.
3. Pour $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $r(P_1 + P_2) = r(P_1) + r(P_2)$.
4. Pour $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $r(P_1P_2) = r(r(P_1)r(P_2))$.
5. Pour $b \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}$, et $r_2(a)$ le reste dans la division euclidienne de a par b, la fonction r_2 vérifie-t-elle les mêmes propriétés que la fonction r ?

Exercice 15.
Rappeler le résultat de cours pour déterminer la multiplicité d'une racine α.
Le polynôme $X^n - 4$ a-t-il des racines multiples ? On ne demande pas de déterminer les racines, juste de calculer la multiplicité d'une racine α.
Montrer que les racines de $X^n + X - 1$ sont de multiplicité 1.
Le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$ a-t-il des racines multiples ?

Exercice 16.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 2$.
En utilisant une formule de Taylor, déterminer la division euclidienne de P par $(X - 2)^2$.
A quelle condition le reste de cette division euclidienne est-il nul ?

Exercice 17. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.
On pourra utiliser une factorisation de P.

Exercice 18.
Soit $n \geq 0$. Est-ce que le polynôme $X^2 + X + 1$ divise $X^{3n+8} + X^{3n+4} + X^{3n}$?

Exercice 19 (Polynômes d'Euler)**.**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $E_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$E_n(X) + E_n(X + 1) = 2X^n$$
2. Trouver une relation entre E_n' et E_n pour tout $n \geq 1$.
3. Pour $h \in \mathbb{R}$, trouver une expression du type :
$$E_n(X + h) = \sum_{p \geq 0} a_p E_p$$
   En déduire une relation de récurrence sur les polynômes E_n.
4. Calculer E_n pour $0 \leq n \leq 4$.