

F E U I L L E D E T D N° 14

I n t é g r a t i o n

■ Révisions : calculs de primitives

Exercice 1. Rappeler les différentes techniques de calcul de primitives. Puis, déterminer les primitives des fonctions suivantes :

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $t \mapsto \sin(3t)$ | 9. $t \mapsto \frac{1}{1+5.t^2}$ |
| 2. $t \mapsto \cos(t) \sin^2(t)$ | 10. $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ |
| 3. $t \mapsto \sin^3(t)$ | 11. $t \mapsto \frac{1}{e^t + 1}$ |
| 4. $t \mapsto \arctan(t)$ | 12. $t \mapsto \frac{1}{t^2+3t+1}$ |
| 5. $t \mapsto t \sin^2 t$ | 13. $t \mapsto \frac{1}{t^2-3t+2}$ |
| 6. $t \mapsto t e^{-t^2}$ | 14. $t \mapsto \cos(t)(\sin^4(t) + 3)$ |
| 7. $t \mapsto (t^2 + t + 1) \sin(t)$ | |
| 8. $t \mapsto e^{2t} \sin(t)$ | |

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $\int_0^1 \sin(3t) dt$ | 6. $\int_0^n e^{-t} dt$ |
| 2. $\int_0^\pi \cos(t) \sin^2(t) dt$ | 7. $\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{t} dt$ |
| 3. $\int_{-10}^{10} \sin^3(t) dt$ | 8. $\int_{\frac{1}{n}}^1 \ln(t) dt$ |
| 4. $\int_{-e^2}^{e^2} \arctan(t) dt$ | 9. $\int_1^n x^a dx, a \in \mathbb{R}$ |
| 5. $\int_0^n x^n dx$ | |

Pour toutes les intégrales dépendant de $n \in \mathbb{N}^*$, étudier le comportement de l'intégrale quand $n \rightarrow +\infty$ (convergente? valeur de la limite?)

Exercice 3. Pour tous entiers naturels p et q , on définit $I_{p,q}$ par : $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

- Montrer que $0 \leq I_{p,q} \leq \min(\frac{1}{p+1}, \frac{1}{q+1})$, en utilisant deux majorations différentes.
- Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $I_{p,0}$. Calculer $I_{1,1}$.
- Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 0$, exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p+1,q-1}$.
- Calculer $I_{5,3}$.
- Déterminer une expression explicite $I_{p,q}$ en fonction de p et q . Puis, démontrer le résultat par récurrence sur q .
On pourra faire un dessin similaire au triangle de Pascal, pour relier les termes $I_{p,q}$ entre eux.
- Montrer que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4}$.
- Montrer que $I_{p,p} \leq \frac{1}{2^{2p}}$.
- Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a $\binom{2p}{p} \geq \frac{4^p}{2p+1}$.

■ Encadrements et propriétés des intégrales

Exercice 4.

- Montrer que $\int_0^1 x^n dx \rightarrow_n 0$.
- Montrer que $\int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Montrer que $\int_0^1 x^n \sin(nx) dx \rightarrow_n 0$.
- Montrer que $\int_1^3 x^n e^{-2nx} dx \rightarrow_n 0$.

Exercice 5. Soit f continue sur $[a, b]$.

On veut montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

- Démontrer le résultat en utilisant le théorème des bornes.
- Démontrer le résultat d'une autre façon en raisonnant par l'absurde.

Exercice 6. Calculer les limites en $+\infty$ des suites suivantes :

- (a) $(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt)_n$ (b) $(\int_0^{\pi/2} \sin(t) e^{-nt} dt)_n$

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \sin(t)^n dt$.

- Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.
- Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante. On pourra raisonner par l'absurde.
- Montrer que cette suite est convergente. Quelle sera à priori sa limite l ?

- On pose $k \in \mathbb{N}^*$. Encadrer la fonction $\sin$ sur $[0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}]$, puis sur $[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}, \frac{\pi}{2}]$.
- A l'aide de ces encadrements, montrer que $I_n \leq \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{k})^n (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}) + \frac{1}{k}$.
- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $l \leq \frac{1}{k}$.
- Démontrer que $l = 0$.

Exercice 8. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{t^n e^t}{1+t^2} dt$.

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
- Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{e}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}(1-t)^2 e^t}{(1+t^2)^2} dt$.
- Montrer que $\frac{2nu_n}{e} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$.

Exercice 9. Soit $f \in C^1([a, b])$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_a^b f(t) \sin(nt) dt$. En utilisant une IPP, montrer qu'il existe deux constantes $m, M \in \mathbb{R}$ telles que $\frac{m}{n} \leq I_n \leq \frac{M}{n}$. En déduire que $(I_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

■ Sommes de Riemann

Exercice 10. Rappeler le résultat principal sur les sommes de Riemann. Déterminer les limites des suites de terme général :

- | | | | | |
|--|--|--|--|---|
| 1. $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$; | | 4. $(\prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n}))^{\frac{1}{n}}$; | | 6. $(\frac{(2n)!}{n^n n!})^{\frac{1}{n}}$. |
| 2. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}$; | | 5. $(\prod_{k=1}^n (1 + \frac{k^2}{n^2}))^{\frac{1}{n}}$; | | |
| 3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$; | | | | |

On pourra utiliser que pour $x > 0$ on a $x = \exp(\ln(x))$.

■ Intégrale d'une fonction continue de signe constant

Exercice 11. Quel résultat de cours relie fonction continue et intégrale nulle ?

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$. On suppose que $\int_a^b f^2 = \int_a^b f^3 = \int_a^b f^4$.

Comment obtenir des intégrales nulles avec ces hypothèses ?

Les fonctions dont les intégrales sont nulles sont-elles forcément positives ?

Quel fait très simple permet de dire immédiatement qu'un nombre réel $g(x)$ est positif ?

Trouver g une combinaison linéaire de f^2, f^3, f^4 qui est comme un multiple de $(1 - f)^2$.

Montrer que cette fonction g est continue, d'intégrale nulle, et de signe constant sur $[a, b]$.

En déduire que f est constante sur $[a, b]$.

Exercice 12.

- Soit f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\int_0^1 f(t) dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans $]0, 1[$.
- On suppose maintenant qu'on a en plus $\int_0^1 t.f(t) dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois dans $]0, 1[$.

■ Fonctions définies à l'aide d'une intégrale

Exercice 13. Soit φ la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R}^*, \varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ et $\varphi(0) = 1$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$.

- Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- Soit F une primitive de φ . Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ en fonction de F .
- Montrer que f est impaire.
- Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
- Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 14.

On pose $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t}) dt$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soient F et G des primitives de $x \mapsto \arcsin(\sqrt{x})$ et $x \mapsto \arccos(\sqrt{x})$ sur $[0, 1]$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ en fonction de F et de G .
3. Montrer que f est paire et π -périodique.
4. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, déterminer une expression simple de $f'(x)$.
5. Pour $y \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, combien vaut $f'(y)$?
6. Pour $z \in \mathbb{R}$, déterminer $f'(z)$.
7. Démontrer que la fonction $g = \arcsin + \arccos$ est constante. On précisera la valeur de cette constante.
8. Calculer $f(\frac{\pi}{4})$.
9. En déduire une expression simplifiée de f .

Exercice 15. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = ax + b$.

■ *Inégalité de Taylor Lagrange*

Exercice 16. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} \max(e^x, 1)}{(n+1)!}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ (à x fixé).

Exercice 18. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \ln(2).$$