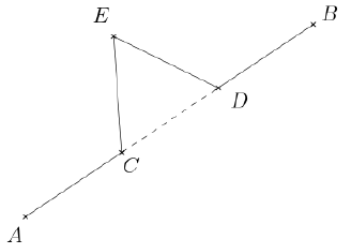
Feuille de TD n° 11 -

Nombres complexes

Le module `numpy` permet aussi de manipuler des nombres complexes. Une fois celui-ci chargé, le nombre complexe i est obtenu en écrivant `1j`. Ainsi, $2-3i$ s'écrira en python `2+(-3)*1j`

Exercice 1 (**Flocon de Von Koch**).
On part d'un triangle équilatéral choisi, et l'on fixe un entier n.
On se propose d'effectuer la transformation suivante de façon répétée (n fois au total) : chaque segment de la figure est coupé en 3, puis la partie centrale est remplacée par deux segments de la même longueur. On obtient par exemple, on partant d'un segment horizontal, les deux étapes suivantes :

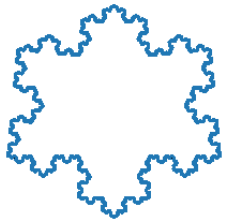
1. On considère deux points A et B d'affixes complexes z_A et z_B. Si l'on coupe le segment $[AB]$ en trois morceaux de même longueur, exprimer les affixes z_C, z_D des deux nouveaux points C et D créés en fonction de z_A et z_B.
2. Lorsque l'on choisit deux points C et D, il existe deux points E_1 et E_2 tels que CDE_1 et CDE_2 forment un triangle équilatéral.
   Exprimer les affixes w_1 et w_2 de E_1 et E_2 en fonction de z_C et z_D.
   On considèrera que CDE_1 est le construit dans le sens trigonométrique, et CDE_2 celui construit dans le sens anti-trigonmétrique. Et, on s'aidera de l'angle t entre $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE_1}$, via le nombre complexe e^{it}.
3. Ecrire deux fonctions `decoupe1(A,B)` et `decoupe2(A,B)` qui prennent en entrée les affixes complexes z_A et z_B, et qui renvoient respectivement la liste $[A, C, E_1, D]$ et la liste $[A, C, E_2, D]$.



4. Ecrire une fonction **decoupepoly(P)** qui prend en entrée une liste de sommets sous forme de nombre complexes, et qui applique un découpage de Von Koch à chacun des segments de ce polygone.
   On utilisera pour cela la fonction `decoupe1` et une boucle `for`.
5. Appliquer la fonction `decoupepoly` au polygone $P = [0, 2, 1j, 1+1*1j, 0]$, et afficher le résultat. On utilisera les commandes suivantes pour tracer une courbe :

```
import matplotlib.pyplot as plt
s = decoupepoly(P) #Liste des sommets à afficher
X=[s.real for s in seg] #Liste des abscisses de chaque sommet
Y=[s.imag for s in seg] #Liste des ordonnées de chaque sommet
plt.plot(X,Y)
plt.axis("equal")
plt.axis("off")
plt.show()
```

6. Créer une fonction `VonKoch(P,n)` qui prend en entrée une liste de complexes P et un nombre entier n et qui applique le découpage n fois à la liste P.
   Puis, appliquer cela à un triangle équilatéral pour obtenir un flocon de Von Koch.
   On pourra utiliser un triangle équilatéral dont deux sommets sont 0 et 2. (à vous de trouver le troisième)



7. Que se passe-t-il si au lieu d'utiliser `decoupe1` on utilise `decoupe2` à la place pour tracer un flocon de Von Koch ?

Exercice 2 (**Le jeu du chaos**).
Le jeu du chaos consiste, à partir d'un triangle équilatéral ABC et d'un point M_0 choisi au hasard à l'intérieur de ce triangle, de construire une suite de points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ tels que pour tout $i \in 1, \ldots, n-1$, M_{i+1} est le milieu de M_i et d'un sommet de ABC choisi au hasard uniforme (parmi A, B et C).

1. Ecrire une fonction `chaos(S,n)` qui prend en entrée un triangle équilatéral S sous forme d'une liste de nombres complexes et un nombre entier n, et qui renvoie la liste des nombres complexes associés à $M_0, M_1, \ldots, M_n$.
   On s'aidera des fonctions `random` et `randint` du module `random`.
   Pour construire M_0, on pourra par exemple prendre le point d'affixe $z = \frac{pz_A+qz_B+rz_C}{p+q+r}$, où p, q, r sont des réels choisis aléatoirement entre 0 et 1.
2. Tracer quelques figures pour différentes valeurs de n et différents essais.
   On utilisera la fonction scatter du module matplotlib.pyplot pour l'affichage.
   Quelle figure obtient-on ?
3. Procéder de même en remplaçant le triangle initial par un pentagone régulier.

Algorithmes gloutons

Un problème d'optimisation est un problème algorithmique dans lequel l'objectif est de trouver la «meilleure» solution (selon un critère donné) parmi un ensemble de solutions également valides mais potentiellement moins bonnes. Par exemple, déterminer le minimum ou le maximum d'une fonction est un problème d'optimisation. On peut également citer la répartition optimale de tâches suivant des critères précis, le problème du rendu de monnaie, le problème du sac à dos, la recherche d'un plus court chemin dans un graphe, le problème du voyageur de commerce.

Le contexte d'un problème d'optimisation est donc :

- ▷ un très grand nombre de solutions (dans le cas contraire, il n'y aurait pas de difficulté à trouver la meilleure),
- ▷ une fonction permettant d'évaluer la qualité de chaque solution,
- ▷ l'existence d'une solution optimale (ou suffisamment satisfaisante).

De nombreuses techniques informatiques sont susceptibles d'apporter une solution exacte ou approchée à ces problèmes. Certaines de ces techniques, comme l'énumération exhaustive de toutes les solutions (on parle de méthode par force brute), ont un coût machine qui les rend souvent peu pertinentes au regard de contraintes extérieures imposées (temps de réponse de la solution imposé, moyens machines limités).

Un algorithme glouton (greedy algorithm en anglais) est un algorithme qui suit le principe de faire, étape par étape, un choix optimum local, dans l'espoir d'obtenir un résultat optimum global, et de ne jamais revenir en arrière sur un choix déjà effectué.

Nous allons étudier dans quelques situations où l'on peut mettre en œuvre un algorithme glouton. Nous verrons que :

- ▷ le principal avantage des algorithmes gloutons est leur facilité de mise en œuvre.
- ▷ leur principal défaut est qu'ils ne renvoient pas toujours la solution optimale.

Exercice 3 (**Problème du rendu de monnaie**).
Vous allez à la boulangerie acheter du pain. Vous payez, et attendez votre monnaie. Il est souhaitable que cela se fasse avec un minimum de pièces, aussi bien pour le vendeur que pour le client. Des caisses automatiques ont été mises au point à cet effet : le client glisse les billets ou les pièces dans la machine, et elle se charge de rentre la monnaie.

Nous allons à présent nous intéresser à la manière dont un automate rend la monnaie. En interne, l'automate ne manipule que des centimes d'euro, qui ont l'avantage d'être des nombres entiers.
L'automate a accès aux valeurs en cents des pièces, stockées dans la liste `VALEURS` définie de la manière suivante : `VALEURS` $= [200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1]$

Vous définirez cette liste comme une variable globale en début de script à l'aide de la commande `global`, afin d'y accéder dans les fonctions que vous écrirez par la suite.
On modélise les pièces utilisées par le monnayeur pour rendre la monnaie par une liste de même taille que `VALEURS`, et qui stocke à chaque indice i le nombre de valeurs `VALEURS[i]` utilisées.
Par exemple, la liste `pieces = [0,0,5,0,2,1,0,2]` représente une liste de cinq pièces de 50 cents, deux de 10 cents, une de 5 cents et deux de 1 cent, pour un montant total de 277 cents, soit $2,77$ euros.

1. Écrire une fonction `pieces2cents(pieces)` qui convertit une liste de nombres de pièces (de même taille que la liste `VALEURS`) en sa valeur totale en cents. La fonction `sum` est interdite.
2. Écrire une fonction `rendu_glouton(montant)` qui implémente l'algorithme glouton pour le rendu de monnaie, cherchant à chaque étape à rendre la pièce de plus haute valeur possible.
3. On appelle canonique un système de pièces pour lequel l'algorithme glouton donne toujours une solution optimale (au sens où le nombre pièces utilisées est minimal), quelle que soit la valeur du montant à rendre.
   Prouver qu'un système avec trois types de pièces : 1,3 et 4 euros (le nom de la monnaie importe peu) n'est pas canonique.
   On peut heureusement prouver que le système de monnaie en euro est canonique.
4. Le système et billets que l'on utilise (`1,2,5,10,20,50,...`) ressemble en partie à une utilisation de puissances de 2, mais pas totalement. Pourquoi n'utilise-t-on pas un système de pièces dont les valeurs sont des puissances de 2 (`1,2,4,8,16`) ?
5. Un automate ne dispose en réalité que d'un nombre fini de pièces de chaque type pour rendre la monnaie.
   Le nombre de pièces restantes de chaque type est stocké dans une variable globale (de type `list`) `CAISSE` telle que `CAISSE[i]` représente le nombre de pièces de valeur faciale `VALEURS[i]` restant en stock.
   Créer une fnction Python `rendu_glouton2(montant)` pour prendre en compte le fait que le réservoir de pièces disponibles n'est pas infini.
   Par exemple, s'il faut 5 pièces de 50 cents mais qu'il n'y en a que 3 dans la caisse, on ne peut en rendre que 3 et il faudra rajouter par exemple 5 pièces de 20 cents pour combler le manque.
6. Tester la fonction sur quelques exemples judicieusement choisis : l'automate peut-il toujours rendre la monnaie ?