# FEUILLE DE TD N° 13

Ce TP porte sur deux grandes familles de méthodes numériques :

— La **méthode d'Euler** et ses variantes pour résoudre numériquement des équations différentielles.

— La **méthode de Newton** pour trouver des racines d'équations.

## RAPPELS THÉORIQUES

### Méthode d'Euler

Pour résoudre de façon approchée $y' = f(t, y)$ avec $y(t_0) = y_0$, on utilise deux suites $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(t_n)_{n\geq 0}$, que la méthode d'Euler explicite exprime par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n), \qquad t_{n+1} = t_n + h,$$

où $h$ est un réel strictement positif fixé en amont.
Plus $h$ est petit, plus l'approximation est bonne (mais plus le calcul est long).

### Méthode du point-milieu

Par rapport à la méthode d'Euler explicite, on calcule d'abord une approximation du point "au milieu" entre $y_n$ et $y_{n+1}$, $k_n$, avant de calculer $y_{n+1}$ à partie de $k_n$ et $y_n$ :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} k_n = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, k_n) \end{cases}$$

### Méthode d'Euler améliorée (Heun)

Par rapport à la méthode d'Euler explicite, on introduit deux quantités supplémentaires, et on utilise une expression de $y_n$ différente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} k_{1,n} = f(t_n, y_n) \\ k_{2,n} = f(t_n + h, y_n + hk_{1,n}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_{1,n} + k_{2,n}) \end{cases}$$

### Méthode de Newton

Elle permet d'approcher la solution $y$ d'une équation $f(x) = 0$, pour $f$ de classe $C^1$ sur un intervalle $I$ et avec $f'(y) \neq 0$. Il faut se fixer une valeur $x_0$ "suffisamment proche" de $y$, puis la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, va converger vers $y$.
Cette convergence sera de plus "quadratique" à partir d'un certain rang. (bonne convergence)

**Exercice 1.**
On considère l'équation différentielle :

$$y' = -y, \quad y(0) = 1$$

dont la solution exacte est $y(t) = e^{-t}$.

1. Écrire une fonction `euler(f, t0, y0, h, N)` qui prend en entrée une fonction $f$, les valeurs initiales $t_0, y_0$, le pas $h$, et un entier $N$, et qui renvoie renvoie deux listes (ou tableaux NumPy) construites via la méthode d'Euler explicite : les temps $t_0, \ldots, t_N$ et les valeurs $y_0, \ldots, y_N$.
2. Appliquer cette fonction à l'équation différentielle donnée, avec $h = 0.1$ et $N = 50$ (jusqu'à $t = 5$).
   Tracer le résultat (liste $t$ en abscisse, liste $y$ en ordonnée), en utilisant `import matplotlib.pyplot as plt` et `plt.plot(t,y)`.
3. Tracer sur le même graphique la solution exacte et la solution approchée. Pour les abscisses, on utilisera deux fois la liste des temps $t$.
4. Recommencer avec $h = 0.01$.

5. Calculer l'erreur maximale entre les valeurs de la solution exacte et celles de l'approximation, dans les cas $h = 0.1$ et $h = 0.01$, $N = 50$.
Que pouvez-vous conclure vis-à-vis du fait que la méthode soit dite "d'ordre 1" ?

**Exercice 2** (**Oscillateur harmonique**).
On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -u \end{cases} \qquad u(0) = 1, \quad v(0) = 0$$

1. Créer une fonction `euler2(f, t0, u0,v0, h, N)` qui adapte la méthode d'Euler au système différentiel présent. (Cela revient à remplacer la fonction $y$ cherchée par la paire de fonction $(u, v)$, et donc la suite $(y_n)_n$ par une paire de suites $(u_n)_n, (v_n)_n$.)
2. Appliquer la fonction dans le cas du système différentiel, sur l'intervalle $[0, 20]$ avec $h = 0.1$. ($N$ sera à déterminer)
3. Tracer sur un même graphe les suites $u$ et $v$ en fonction du temps $t$.
Tracer également la trajectoire dans le plan de phase $(u, v)$.
4. Recommencer avec $h = 0.5$. Que se passe-t-il ?
5. Quelles est la solution $(u, v)$ exacte de ce système différentiel ? Comparer les valeurs obtenues par la méthode d'Euler explicite avec le couple solution exact.

**Exercice 3** (**Croissance logistique**).
On étudie l'équation de Verhulst :

$$y' = 0.5\, y \left(1 - \frac{y}{100}\right), \quad y(0) = 10$$

1. Tracer la solution obtenue par la méthode d'Euler explicite, jusqu'à $t = 20$, avec $h = 0.1$.
2. Tracer également la solution exacte :

$$y(t) = \frac{1000}{10 + 90e^{-0.5t}}$$

3. Tester avec différentes conditions initiales : $y_0 = 5$, $y_0 = 150$, $y_0 = 100$.
Commenter les comportements obtenus.

4. Définir une fonction `euler3` qui implémente la méthode du point-milieu.
5. Définir une fonction `euler4` qui implémente la méthode de Heun.
Tracer le résultat obtenu par les trois méthodes, ainsi que la solution exacte. Comparer les résultats obtenus.

**Exercice 4** (**Méthode de Newton**).

1. Écrire une fonction `newton(f, df, x0, N)` qui renvoie la liste de valeurs $x_0, \ldots, x_N$ obtenues en appliquant la méthode de Newton.
2. Trouver une approximation de $\sqrt{2}$ avec 10 chiffres de précision en résolvant $x^2 - 2 = 0$ , avec $x_0 = 1$.
3. Trouver les racines de $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ en testant $x_0 = 0$, $x_0 = 0.7$ et $x_0 = 2$.
4. Tracer la fonction $f$ et les itérations successives pour le cas $x_0 = 0$.
5. Que se passe-t-il si $f'(x_n)$ est proche de zéro ou si $f'(y)$ vaut 0 ?
Tester avec $f(x) = x^3 - 3x + 5 = 0$, $x_0 = 1.1$, et avec $f(x) = x^3$ et $x_0 = 0.1$.