

FEUILLE DE TD N° 1

Calculs algébriques■ *Logique*

Exercice 1. Cet exercice consiste à étudier des propositions logiques. A priori on ne cherche pas à savoir si elles sont vraies ou fausses sauf lorsque cela sera précisé.

- Convertir chacun des énoncés suivants à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
 - Pour tout nombre réel, il existe un entier qui lui soit supérieur.
 - La fonction exponentielle prend la valeur 1.
 - La fonction carrée ne prend pas la valeur -1 .
- Transformer les énoncés suivants en énoncé n'utilisant pas de symboles mathématiques et déterminer s'ils sont vrais.
 - $x \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{Q}, x \neq q$.
 - $\exists q \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq q$.
 - $\exists n \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{R}, n^y = 81$.
 - $\forall x \in \mathbb{Q}, \exists! a \in \mathbb{Z}, \exists! b \in \mathbb{Z}, x = \frac{a}{b}$.
- Exprimer la négation des énoncés suivants.
 - Toutes les chauves-souris volent.
 - A tout étudiant de PTSI correspond un autre étudiant de la classe qui n'est pas son ami.
 - Tous les sacs à mains contiennent au moins un porte-feuille.

■ *Simplifications*

Exercice 2. Simplifier :

- $A = 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}$
- $B = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
- $C = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \times \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$
- $D = \frac{(\sqrt{ab})^4}{b^3 a^{-1} b^{-1}}$, avec $a, b \in]0, +\infty[$.

Exercice 3. Simplifier les expressions suivantes :

- $\ln(e^{3x}) - e^{\ln(3x)}$
- $\frac{e^{-4 \ln x} e^{\ln(x^5)}}{e^{\ln(\frac{1}{2})}}$
- $\frac{\exp(x^2)}{(e^x)^2}$
- $\ln(2x) - \ln(x)$

■ *Résolution d'équations, inéquations, tableaux de signes...*

Exercice 4 (Valeur absolue). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $|x + 1| = 2$
- $|x - 3| < 2$
- $|x + 4| \geq 5$
- $|x + 1| - |2x + 1| = 0$
- $3|2x + 5| + |x + 2| \geq 0$

Exercice 5 (Racine carrée). Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $\sqrt{x - 4} = 2$
- $\sqrt{6x + 19} = 3x + 1$
- $x - 2 = \sqrt{x}$

Exercice 6. Donner le tableau de signe des fonctions suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. P_1(x) = x^2 - x - 6. \\ 2. P_2(x) = x^2 + 1. \\ 3. P_3(x) = x^2 + 2x + 1. \\ 4. P_4(x) = x^4 - 9. \end{array} \right| \begin{array}{l} 5. Q_1(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{-2x^2 + 1}. \\ 6. Q_2(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3}. \end{array}$$

On fera attention au domaine de définition.

Exercice 7.

1. Démontrer que pour $x \neq 1$ on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$$

2. En utilisant des inégalités, démontrer que pour tout $x \in [-1/2, 1/2]$ on a

$$0 \leq \frac{x^2}{1-x} \leq 2x^2.$$

3. En déduire un encadrement de $\frac{1}{1-x}$ sur $[-1/2, 1/2]$ par deux fonctions polynômiales.

Exercice 8. Donner le signe et factoriser (si c'est possible) les quantités suivantes :

$$1. (\ln(x))^2 - \ln(x) - 6 \quad \left| \quad 2. x - \frac{1}{x} \right.$$

Exercice 9. Déterminer les solutions (si il y en a) des systèmes suivants :

$$\begin{array}{ll} (a) \begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} & (c) \begin{cases} e^{a+b} = 3 \\ e^a + e^b = 4 \end{cases} \\ (b) \begin{cases} x+y = 5 \\ xy = 10 \end{cases} & (d) \begin{cases} x+y = 3 \\ xy = m \end{cases}, \text{ en fonction de } m \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Exercice 10. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 1. (\ln(x))^2 - \ln(x) \geq 0 \\ 2. x = 2 - \sqrt{x} \\ 3. \exp\left(\frac{3x+4}{2x-5}\right) \leq 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 4. \exp\left(\frac{3x+4}{2x-5}\right) \geq 1 \\ 5. \ln\left(\frac{3-x}{x+2}\right) \geq 0 \end{array}$$

Exercice 11. Donner le domaine de définition de chaque fonction.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+5) + \ln(7-3x) + e^{-2x} \\ g(x) &= \frac{\ln(x^2 - 4x + 3)}{e^{2x} - 5} \\ h(x) &= \sqrt{x^2 - x - 6}. \end{aligned}$$

Exercice 12. Soit $m \in \mathbb{R}$.

Résoudre, en fonction de m , les équations et inéquations suivantes.

1. $(m+2)x^2 + 4mx + (4m-2) = 0$.
2. $(m+2)x^2 + 4mx + (4m-2) > 0$.
3. $(m^2 + m - 2)x + (m+2)(m-3) = 0$.

Exercice 13.

1. Résoudre l'équation $|4 + 2x| + 12 - 2x = x^2$, avec $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de

$$|4 + 2\ln(x)| + 12 - 2\ln(x) = (\ln(x))^2$$

3. Même question pour $|4e^{-x} + 2| + 12e^{-x} - 2 = e^x$.

■ *Pour aller plus loin . . .*

Exercice 14. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\frac{1}{3} \leq \frac{x+1}{2x+3} \leq \frac{1}{2}.$$

Trouver une deuxième façon de prouver ces inégalités.

Exercice 15. Montrer que l'équation $\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = 0$ possède une solution dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Est-ce que la solution trouvée est unique ?

Exercice 16. Soit $x \in [2, 3]$. Fournir un encadrement de $\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 1}$.

Exercice 17. On pose $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \mapsto \frac{2x-1}{x+3}$. Déterminer l'image de $[0, +\infty[$ par f .

Démontrer que tous les nombres réels sauf un sont dans l'image de f . On donnera la valeur de ce nombre.

Exercice 18. Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3$.

On pourra utiliser une identité remarquable.

■ Sommes et produits

Exercice 19 (Somme télescopique).

1. Déterminer des réels c, d tels que :

$$\frac{c}{k} + \frac{d}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

2. Déterminer des réels a et b tels que :

$$\frac{a}{k(k+1)} + \frac{b}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ à l'aide de la méthode des sommes télescopiques vue en cours.

Exercice 20 (Simplification). Écrire sans le symbole Π ou $\sum$ les expressions suivantes. On utilisera des sommes et produits usuels vus en cours.

$$1. \prod_{k=1}^n (2k+1)$$

$$2. \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$$

$$3. \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

$$4. \prod_{k=1}^n \frac{2k}{k+1}$$

$$5. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

■ Sommes doubles

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer une expression des sommes doubles suivantes, seulement en fonction de n .

$$1. S_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j)$$

$$2. S_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j}$$

$$3. S_3 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$$

Exercice 22.

1. Soient $k, i, n \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq i \leq n$. Montrer que l'on a :

$$\binom{n}{i} \binom{i}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{n-i}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \binom{i}{k}.$$

■ Coefficients binomiaux

Exercice 23 (Application de la formule du binôme).

1. Développer et simplifier $(2+x)^3$, $(1-1)^4$, $(x-y)^6$ et $(3a+2b)^4$.

2. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

3. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-k+1}$.

4. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^{k+2}$.
5. Soit $n \geq 2$. Calculer $\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 2^{k-1}$.

Pour aller plus loin . . .

Exercice 24. Soit $n > 1$. Le but est de calculer $\sum_{k=0}^n (k+1) \binom{n}{k}$.

1. Montrer que $\forall 1 \leq k \leq n$, on a $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
En déduire une expression de $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$, et conclure.
2. (Deuxième méthode) Ecrire le développement de $f(x) = x(1+x)^n$.
Calculer la dérivée de la fonction f de deux façons différentes.
Calculer $f'(1)$, et conclure.

Exercice 25 (Formule d'itération de Pascal). Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p$.

1. Montrer que $\sum_{k=n}^p \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$.
On pourra faire un dessin avec le triangle de Pascal.
2. Soit $i \geq 1$.
En déduire la valeur de la somme suivante seulement en fonction de n et de i :

$$\sum_{k=0}^n k(k+1)(k+2) \dots (k+i-1)$$

Exercice 26. Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\max(a, b) + \min(a, b)$ et $\max(a, b) - \min(a, b)$ en fonction de a , de b , et avec la fonction $|\cdot|$.
2. Exprimer $\max(a, b)$ et $\min(a, b)$ en fonction de a, b , et avec la fonction $|\cdot|$.
On pourra s'aider de la question précédente.