

F E U I L L E D E T D N ° 2 0

S é r i e s n u m é r i q u e s

Exercice 1.

1. Pour quelles valeurs de $q \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geq 0} q^n$ est-elle convergente ?
Si cette série converge, combien vaut sa somme S ?
2. On suppose la série convergente.
Exprimer le reste R_N de cette série en fonction de la somme S et de la somme partielle S_N .
Puis, donner la valeur de R_N en fonction de q et de N .
3. Retrouver la valeur de R_N en effectuant le changement de variables $m = n + N + 1$.

Exercice 2. Pour chaque série, donner un indice initial convenable, et étudier leur nature (distinguer selon la valeur de $x \in \mathbb{R}$ pour les séries avec un paramètre x).

- | | |
|----------------------------------|---|
| • $\sum_n \frac{2n^2}{n^3 - 1}$ | • $\sum_n \frac{n(n-1)x^n}{n!}$ |
| • $\sum_n \frac{1}{2^{2n+1}}$ | • $\sum_n \frac{4(-1)^n}{n!}$ |
| • $\sum_n \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ | • $\sum_n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ |
| • $\sum_n \frac{e^n}{3^n}$ | • $\sum_n \frac{1}{4n^2 - 1}$ |
| • $\sum_n e^{-nx}$ | • $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$ |

Pour chaque série convergente, essayer de calculer leur somme. Certaines sont plus difficiles que d'autres.

Indications : Décomposer en série entière $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$, $\frac{1}{4n^2-1}$. Méthodes de calcul du cours.

Exercice 3. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n^2 + 1}$ est convergente.

A l'aide d'un équivalent, déterminer un équivalent de son reste R_n .

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer un second équivalent de son reste R_n .

Exercice 4. Etudier la série $\sum_n \tan\left(\frac{1}{n}\right)$. On utilisera un développement limité. Etudier cette série à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

En déduire que $\int_x^1 \frac{1}{x^2} \tan(x) dx \rightarrow_{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

Exercice 5. Pour $a < 0$, déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)^a}{x}$.

A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer la nature de $\sum_n \frac{\ln(n)^a}{n}$.

Exercice 6. Étudier la nature des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme :

- | | |
|---|--|
| • $\sum_n \frac{1}{n^3 + 2^n}$ | • $\sum_n \frac{1}{n^2 - n}$ |
| • $\sum_n \ln \frac{n^2 + n^4}{2n^4}$ | • $\sum_n \sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1}}$ |
| • $\sum_n \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}$ | • $\sum_n \frac{n^2}{n!}$ |
| • $\sum_n \ln \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2n}$ | • $\sum_n \frac{\ln n}{3^n}$ |

Exercice 7. Soit u_n une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n, \forall n \geq 1$.

1. Montrer que la suite u_n est convergente, et préciser sa limite.
2. En posant $v_n = \ln u_n$, exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et u_n .
Puis, calculer la somme partielle entre 0 et N de la série de terme général u_n en fonction de v_0 et de v_{N+1} .
3. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 8. On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$, puis $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 9. 1. Déterminer trois réels a , b et c tels que la série de terme général $a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n+1}$ soit convergente.

On pourra penser à ressortir les DL .

2. Même question pour la série de terme général $\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \left(an + b + \frac{c}{n}\right)$.

Exercice 10 (Critère de convergence des séries alternées). Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels positifs, décroissante, telle que $a_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

On veut montrer que la série $\sum_n (-1)^n a_n$ est convergente.

1. Montrer que les suites de sommes partielles $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont convergentes.

On pourra s'aider d'un dessin.

2. En déduire que la série $\sum_n (-1)^n a_n$ est convergente.

3. Une telle série est-elle toujours absolument convergente ?

4. Construire deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $\sum_n u_n$ CV et $\sum_n v_n$ DV, et telles que $u_n \sim v_n$.

On pourra s'aider des questions précédentes.

Cela démontre que la proposition sur les séries de termes généraux équivalents est fautive si l'on sort du cadre des séries à termes positifs.

Exercice 11 (Séries lacunaires).

1. Déterminer une série à termes positifs $\sum_n u_n$ qui est convergente et telle que $(u_n)_n$ n'est pas majorée par $(\frac{1}{n})_n$ à partir d'un certain rang.

On pourra prendre une série convergente $\sum_n w_n$ et construire u_n à partir des w_k .

2. Déterminer une série à termes positifs non-nuls $\sum_n u_n$ qui est convergente et telle que $(u_n)_n$ n'est pas majorée par $(\frac{1}{n})_n$ à partir d'un certain rang.

Exercice 12. Le but de cet exercice est de prouver la convergence de la série exponentielle (pour $x = 1$) d'une autre façon.

1. Montrer que $\forall n \geq 4$, on a $n! \geq 2^n$.

2. En déduire que $\forall n \geq 4$, on a $\sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^3}$.

3. Prouver la convergence de la série exponentielle $\sum \frac{1}{k!}$, et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 13 (Construction de cos et de sin).

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_n \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente.

On note $\cos(x)$ sa somme.

2. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_n \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est convergente.

On note $\sin(x)$ sa somme.

Exercice 14 (Séries complexes). Pour $(z_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs complexes, on dit que la série $\sum_n z_n$ converge si les séries $\sum_n \operatorname{Re}(z_n)$ et $\sum_n \operatorname{Im}(z_n)$ convergent. Dans ce cas on pose $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(z_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(z_n)$. On dit que la série $\sum_n z_n$ est absolument convergente si la série $\sum_n |z_n|$ converge.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $\max(|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|) \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$.

2. On suppose que $\sum_n z_n$ est absolument convergente. Montrer que $\sum_n z_n$ converge.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $z_n = \frac{(ix)^n}{n!}$.

Montrer que la série $\sum_n z_n$ est convergente. On notera $\exp(ix)$ sa somme.

4. En utilisant l'exercice précédent, démontrer les formules d'Euler : $\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}$ et $\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$.

Exercice 15.

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_n (n+1)x^n$ converge, et que $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}$.

2. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_n \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ converge, et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = \ln(1+x)$.

3. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_n \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$ converge, et déterminer $\sum_{k=2}^{+\infty}$.

4. Décomposer le polynôme X^2 dans la base $(1, X+1, (X+1)(X+2))$.

5. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_n n^2 x^n$ converge, et déterminer sa somme.