

FEUILLE DE TD N° 18

Géométrie dans l'espace

Exercice 1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer un vecteur unitaire et normal au plan dirigé par \vec{u} et \vec{v} .
- Déterminer un vecteur orthogonal à \vec{u} et coplanaire à \vec{u} et \vec{v} .

■ Repérages

Exercice 2. Soit M un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère \mathcal{R} .

- Montrer qu'il existe un réel positif r , deux angles $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ tels que :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

- Montrer que le triplet (r, φ, θ) est unique si M n'appartient pas à l'axe (Oz) . On dit que (r, φ, θ) sont les coordonnées sphériques du point M .

■ Produit scalaire

Exercice 3. Soient $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (1, 1, 2)$ et $\vec{w} = (3, 2, 2)$.

- Montrer que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de l'espace. Cette base est-elle directe (on rappelle qu'une base est directe ssi son produit mixte est strictement positif) ?
- Soit $\vec{t} = (1, -1, m)$ où m est un paramètre réel. Exprimer \vec{t} dans la base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Pour quelle(s) valeur(s) de m , les vecteurs \vec{t} , \vec{v} et \vec{w} sont-ils coplanaires ?

Exercice 4. Soit A un point du plan, \vec{u} un vecteur et $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$.

Indication : On pourra utiliser le projeté orthogonal de M sur la droite (D) passant par A et dirigée par \vec{u} .

■ Plans et droites

Exercice 5. 1. Trouver une famille de deux vecteurs directeurs du plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$. En déduire un système d'équations paramétriques de ce plan.

- Trouver un vecteur directeur, puis une représentation paramétrique de la droite dont un système d'équations cartésiennes est : $\begin{cases} 2x + y - 4z = 6 \\ x - y + 3z = 2 \end{cases}$

Exercice 6. Trouver un vecteur directeur de la droite dont un système d'équations cartésiennes est : $\begin{cases} x = y + 1 \\ z = y \end{cases}$. En déduire une équation cartésienne du plan orthogonal à cette droite et passant par $A = (1, 1, 1)$.

Exercice 7. Calculer la distance de $A = (1, 1, 4)$ à P d'équation cartésienne $x - y + 2z = 2$.

Calculer la distance de $A = (4, -3, 2)$ à (D) passant par $B = (1, 0, -1)$ et dirigée par $\vec{u} = (2, -1, 3)$.

Exercice 8. Soit P le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z + 4 = 0$, $A = (0, 1, 2)$, $B = (-1, 0, 1)$ et $C = (1, 1, 1)$.

- Montrer que A, B et C ne sont pas alignés et déterminer une équation cartésienne de P' le plan contenant ces trois points.
- Montrer que P et P' sont sécants selon une droite D .

Exercice 9. Soient A et B deux points distincts et I le milieu de $[AB]$. Montrer que le lieu des points équidistants de A et de B est le plan passant par I orthogonal à (AB) .

On appelle ce plan, le **plan médiateur** de $[AB]$

Exercice 10. On note $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, -1, 2)$, $C = (0, 1, -2)$, (D_1) la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$, (D_2) la droite de

représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ P_1 le plan de représentation

paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - 2t + 3u \\ y = -2 + t + u \\ z = 4 - t - 2u \end{cases}$, P_2 d'équation cartésienne $2x - y + 3z = 1$

et P_3 d'équation cartésienne $x + 2z - 4 = 0$

1. Donner une équation cartésienne de P_1 .
2. Donner une équation paramétrique de la droite définie par l'intersection des plans P_2 et P_3 .
3. Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .
4. Déterminer l'intersection de (D_1) et de P_2 .
5. Donner une équation paramétrique du plan contenant (D_1) et parallèle à (D_2) .
6. Déterminer l'intersection de P_1, P_2 et P_3 .
7. Déterminer l'intersection de P_2 et de (AB) .
8. Donner une équation cartésienne du plan passant par C et contenant (D_1) .

Exercice 11. Soient $P : 3x - 4y + 1 = 0$ et $Q : 2x - 3y + 6z = 1$ deux plans. Déterminer l'ensemble des points M qui sont équidistants de P et de Q .

Exercice 12. Soient $A = (2, 3, 1)$, $P : 2x - 5y + 4z = 1$, $d : \begin{cases} 2x - y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$. Déterminer toutes les droites passant par A , parallèles à P , et qui sont sécantes à D .

■ Produit vectoriel

Exercice 13. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs de coordonnées $(-1, 1, 1)$, $(1, 2, -1)$ et $(2, 0, 3)$.

Exercice 14. Double produit vectoriel

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs.

1. On suppose que la famille (\vec{u}, \vec{v}) est libre. En utilisant le projeté orthogonal et la renormalisation, construire une famille (u', v') qui est une base orthonormée de $Vec(\vec{u}, \vec{v})$.

2. En déduire qu'il existe une base orthonormée directe (u', v', w') de \mathbb{R}^2 dans laquelle les coordonnées des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ont la forme :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{w} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

3. Montrer que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$.
4. Calculer $(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j}$ et $\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j})$ et en déduire que le produit vectoriel n'est pas associatif.

Exercice 15.

1. Soient u, v, w dans \mathbb{R}^3 . Démontrer la formule du double-produit vectoriel : $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$.
2. En déduire que $(u \wedge v) \wedge w + (v \wedge w) \wedge u + (w \wedge u) \wedge v = \vec{0}$.

■ Sphères

Exercice 16. Soient $A = (5, -1, 4)$ et $B = (2, 0, 1)$. Donner une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[A, B]$.

Exercice 17. Montrer que par quatre points non coplanaires passe une unique sphère.

Exercice 18. Soit S la sphère d'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$$

1. Déterminer le centre et le rayon de S .
2. Déterminer les points M_1 et M_2 de S respectivement le plus proche et le plus éloigné du plan \mathcal{P} d'équation :

$$\mathcal{P} : 3x - 4z + 19 = 0$$

On précisera la distance de M_1 et M_2 à P .