

## F E U I L L E D E T D N° 2

*Trigonométrie***Exercice 1.**

1. Donner la valeur de  $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ , puis celle de  $\sin\left(-\frac{43\pi}{6}\right)$ .
2. Soit  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  tel que  $\cos(x) = -\frac{4}{5}$ . Calculer  $\sin(x)$ .
3. Calculer  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

**Exercice 2.**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

|                                      |  |                                            |
|--------------------------------------|--|--------------------------------------------|
| (a) $\tan(x) = \sqrt{3},$            |  | (d) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4),$ |
| (b) $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{4}.$ |  | (e) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0.$   |
| (c) $\cos(2x) = \cos^2(x),$          |  |                                            |

2. Pour quelles valeurs de  $m$  l'équation  $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = m$  admet-elle des solutions ? Déterminer ces solutions lorsque  $m = \sqrt{2}$ .  
On pourra s'aider d'une formule trigonométrique.

**Exercice 3.** Calculer les valeurs des nombres suivants :

$$\bullet \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \sin\left(\frac{\pi}{8}\right). \quad \left| \quad \bullet \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right). \quad \left| \quad \bullet \cos\left(\frac{\pi}{12}\right), \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

**Exercice 4.** Montrer que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ , on a  $x \leq \tan(x)$ .

Montrer que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $\sin(x) \leq x$ .

Montrer que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ . (\*)

**Exercice 5.** En réalisant une étude de fonction, montrer que pour tout  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  on a :

$$2x < \sin(x) + \tan(x).$$

**Exercice 6.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

|                              |  |                                       |
|------------------------------|--|---------------------------------------|
| 1. $\cos(2x) = \frac{1}{2}$  |  | 3. $\cos(4x) + 2 \sin(x) \cos(x) = 0$ |
| 2. $\cos(3x) - \sin(3x) = 0$ |  | 4. $\sin^2(x) - \sin(x) - 2 = 0$      |

**Exercice 7.**

1. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ .  
Montrer qu'il existe un nombre réel  $\varphi$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$a \cos(x) + b \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x + \varphi).$$

2. Écrire sous la forme  $A \cos(x - \varphi)$  l'expression  $\cos(x) - \sqrt{3} \sin(x)$ .

**Exercice 8.**

1. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Exprimer  $\tan(a + b)$  et  $\tan(a - b)$  uniquement en fonction de  $\tan(a)$  et  $\tan(b)$ .
2. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $t = \tan(\frac{x}{2})$ .  
Montrer que  $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ .
3. Exprimer  $\sin(x)$  en fonction de  $t$ , puis  $\tan(x)$  en fonction de  $t$ .  
Ces relations sont les **formules de l'arc moitié**. Elles permettent d'exprimer  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\tan(x)$  comme des quotients de polynômes en  $t$ , ce qui est utile dans les situations de trigonométrie les plus complexes.
4. Exprimer la dérivée de  $\tan(\frac{x}{2})$  en fonction de  $t$ .