

Chapitre 2

Trigonométrie

On se place tout au long de ce chapitre dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$, la norme de $\vec{u}$ vaut $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Avant d'aborder les propriétés des fonctions cosinus et sinus (dont les formules trigonométriques), nous allons donner une définition de tous ces éléments via la géométrie euclidienne.

1 Généralités

1.1 Cosinus et sinus

DÉFINITION 1 (**Angle géométrique**)

Soient A, B, C trois points du plan.

On appelle angle géométrique " ABC ", noté $\widehat{ABC}$, la donnée des points A, B, C dans cet ordre.

DÉFINITION 2 (**Cosinus et sinus géométriques**)

Soient A, B, C trois points du plan tels que le triangle ABC est rectangle en A .

On définit le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$ et le sinus de l'angle $\widehat{ABC}$ par les deux nombres réels suivants :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}.$$

EXEMPLE 3 — Si ABC est un triangle rectangle en A et isocèle en A , alors on a :

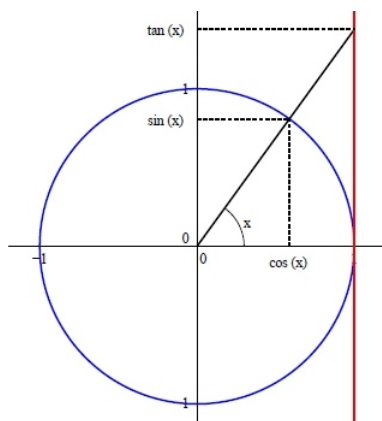
$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En effet, avec le théorème de Pythagore on obtient $AB^2 + AC^2 = 2AB^2 = BC^2$.

DÉFINITION 4 (**Cercle trigonométrique**)

On note $\mathcal{C}_0$ le cercle trigonométrique, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan dont la distance à l'origine vaut 1.

$$\mathcal{C}_0 = \{M \in \mathcal{P} \text{ t.q. } \|OM\| = 1\} = \{(x, y) \in \mathcal{P} \text{ t.q. } \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}.$$



Le cercle trigonométrique, et la position de $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\tan(x)$.

Le périmètre du cercle trigonométrique vaut 2π .

On commence par définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel x dans le cas $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On pose $I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $J \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons M l'unique point du cercle trigonométrique situé

dans le quart supérieur droit, tel que l'arc de cercle $\widehat{IM}$ soit de longueur x .

Pour repérer un tel point M en pratique il faut prendre une ficelle de longueur x , placer une extrémité sur I , et l'enrouler sur le cercle trigonométrique. L'autre extrémité sera alors au point M .

DÉFINITION 5 (Cosinus et sinus d'un réel dans $[0, \pi]$)

1. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on note M le point construit précédemment.

On note A le projeté orthogonal de M sur la droite (OI) . On définit alors :

- $\cos(x)$ comme le nombre $\cos \widehat{OAM}$.
- $\sin(x)$ comme le nombre $\sin \widehat{OAM}$.

Comme M est sur le cercle trigonométrique, on a $\cos(x) = OA$ et $\sin(x) = AM$.

2. Pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, on définit :

- $\cos(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$.
- $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

REMARQUE 6 — On vient de définir deux fonctions, sinus et cosinus, sur l'intervalle $[0, \pi]$.

On a comme valeurs particulières $\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$ et $\sin(-\pi) = \sin(\pi) = 0$.

DÉFINITION 7 (Fonctions cosinus et sinus)

Étendons ces deux fonctions sur $[-\pi, \pi]$, intervalle centré en 0, avec les conditions suivantes :

- la fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos(x)$, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$)
- la fonction sinus est impaire ($\sin(-x) = -\sin(x)$, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$)

Enfin, nous allons étendre ces fonctions sur $\mathbb{R}$ tout entier avec la condition de 2π -périodicité : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

PROPOSITION 8 1. Il est possible d'étendre le domaine de définition des fonctions $\cos$ et $\sin$ à tout $\mathbb{R}$ en les rendant 2π -périodiques.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$. (Conséquence de la construction de $\cos, \sin$ et du théorème de Pythagore)

3. Soit $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un point du cercle trigonométrique.

Il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos \theta$ et $b = \sin \theta$. Tout point du cercle trigonométrique a ses coordonnées qui sont le cosinus et le sinus d'un nombre réel.

Avec la méthode de construction de $\cos, \sin$ et le cercle trigonométrique, on peut donner les principaux liens entre différentes valeurs de $\cos$ et $\sin$.

PROPOSITION 9

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$

Avec la propriété de 2π -périodicité de $\cos, \sin$, nous apportons une propriété mathématique qui permet d'expliquer comment calculer $\cos(x)$ pour un $x \in \mathbb{R}$ quelconque : la congruence modulo 2π .

1.2 Equations et inéquations trigonométriques.

DÉFINITION 10 (Congruence)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des réels.

On dit que a est congru à b modulo 2π , noté $a \equiv b \pmod{2\pi}$, s'il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = k \cdot 2\pi$.

On peut alors démontrer par récurrence sur $n \geq 0$ et sur $n \leq 0$ que :

COROLLAIRE 11

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des réels.

Si a et b sont congrus modulo 2π , alors on a $\cos(a) = \cos(b)$ et $\sin(a) = \sin(b)$.

En général, si l'on veut calculer $\cos(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ éventuellement très grand, on cherche $y \in [-\pi, \pi]$ tel que $x \equiv y \pmod{2\pi}$. On a ainsi $\cos(x) = \cos(y)$. Puis, on utilise les autres propriétés de $\cos$ pour obtenir ou approcher la valeur de $\cos(y)$.

Regardons maintenant les équations de la forme $\cos(x) = y$ et $\sin(x) = y$. Ces équations apparaissent fréquemment en géométrie et en analyse.

PROPOSITION 12

Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation trigonométrique $(E) : \cos(x) = y$ se résout suivant deux cas distincts.

- Si $y \in [-1, 1]$, il existe $x_0 \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x_0) = y$.
Et, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{x_0 + 2k\pi \text{ t.q. } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x_0 + 2k\pi \text{ t.q. } k \in \mathbb{Z}\}.$$

On a $\cos(x) = y$ si et seulement si $x \equiv x_0 \pmod{2\pi}$ ou $x \equiv -x_0 \pmod{2\pi}$.

- Si $y \notin [-1, 1]$, l'équation n'a pas de solutions.

PROPOSITION 13

Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation trigonométrique $(E) : \sin(x) = y$ se résout suivant deux cas distincts.

- Si $y \in [-1, 1]$, il existe $x_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(x_0) = y$.
Et, l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\{x_0 + 2k\pi \text{ t.q. } k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x_0 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

On a $\sin(x) = y$ si et seulement si $x \equiv x_0 \pmod{2\pi}$ ou $x \equiv \pi - x_0 \pmod{2\pi}$.

- Si $y \notin [-1, 1]$, l'équation n'a pas de solutions.

EXERCICE 1 — Résoudre les équations $\cos(x) = -1$ et $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2 Formulaires

PROPOSITION 14 (Valeurs particulières de $\cos$ et $\sin$)

On a :

1. $\cos(0) = 1, \sin(0) = 0$. $\cos(2\pi) = 1, \sin(2\pi) = 0$.
2. $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
3. $\cos(\pi) = -1, \sin(\pi) = 0$.
4. $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
5. $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.
6. $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}, \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

PROPOSITION 15 (Théorème de Pythagore trigonométrique)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

THÉORÈME 16 (Formules trigonométriques de duplication de l'angle)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$1. \cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1 = 1 - 2\sin(a)^2.$$

$$2. \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

On utilise parfois $\cos(a)^2 = \frac{\cos(2a)+1}{2}$.

THÉORÈME 17 (Formules d'addition et de soustraction)

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$1. \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$2. \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

$$3. \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$4. \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

THÉORÈME 18 (Formules de factorisation)

Soient p et $q \in \mathbb{R}$. On a :

$$1. \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$2. \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$3. \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$4. \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

THÉORÈME 19 (Formules de développement)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$1. \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$2. \sin(a)\sin(b) = \frac{-1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

$$3. \cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

Les formules de factorisation et de développement découlent des formules d'addition et de soustraction.

On utilise souvent ces formules en analyse ou en géométrie, pour transformer un produit de $\cos, \sin$ en une somme ou bien pour transformer une somme de $\cos, \sin$ en un produit.

EXEMPLE 20 — Pour calculer une primitive de $x \mapsto \cos(2x)\sin(3x)$, on va transformer le produit en une somme.

Pour résoudre l'équation $\cos(5x) + \cos(2x) = 0$, on va transformer la somme en un produit.

Nous reverrons les fonctions sinus et cosinus dans la suite du cours, notamment en analyse (calcul de dérivée, limites, ...).

3 Fonction tangente

DÉFINITION 21

On définit la fonction tangente, notée $\tan$, par :

$$\begin{aligned}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

Attention, on ne peut donner un sens à $\tan(x)$ que quand $\cos(x) \neq 0$.