

DS01 CORRIGE

Partie A : MANEGE A SENSATIONS MIØLNRYR

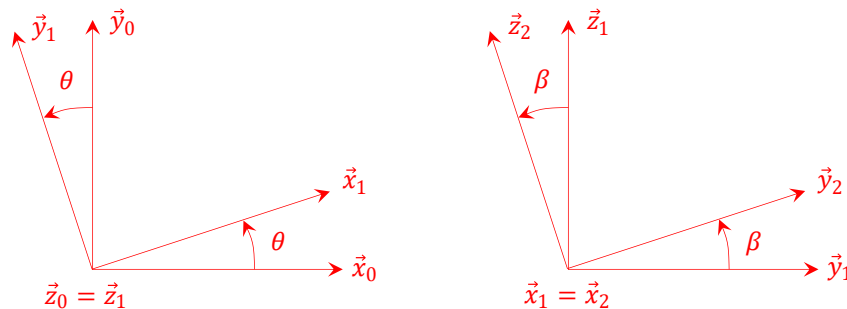
Question 1 : Par une phrase simple donner la matière d'œuvre de l'attraction ainsi que sa valeur ajoutée.

La matière d'œuvre de l'attraction est ses passagers et sa valeur ajoutée est le divertissement des passagers.

Question 2 : Par une phrase simple exprimer le besoin satisfait par l'attraction.

L'attraction Miølnryr permet de divertir les passagers en leur procurant des sensations fortes.

Question 3 : Tracer les figures de changement de base.



Question 4 : En déduire les vecteurs rotations correspondants.

$$\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\Omega}_{R_2/R_1} = \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\beta}(t) \cdot \vec{x}_1$$

$$\vec{\Omega}_{R_2/R_0} = \vec{\Omega}_{R_2/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{z}_0 + \dot{\beta}(t) \cdot \vec{x}_1$$

Question 5 : Donner l'expression du vecteur position du point C par rapport au référentiel R_0 .

Le vecteur position du point C est donné par :

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} = h \cdot \vec{z}_0 + R \cdot \vec{y}_1 + L \cdot \vec{y}_2$$

Question 6 : Montrer que le vecteur vitesse $\vec{V}_{C/R_0}$ s'écrit :

$$\vec{V}_{C/R_0} = -(R + L \cdot \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{x}_1 + L \cdot \dot{\beta}(t) \cdot \vec{z}_2$$

Par définition, $\vec{V}_{C/R_0}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{C/R_0} &= \left. \frac{d\vec{OC}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d(h \cdot \vec{z}_0 + R \cdot \vec{y}_1 + L \cdot \vec{y}_2)}{dt} \right|_{R_0} \\ \vec{V}_{C/R_0} &= \frac{dh}{dt} \cdot \vec{z}_0 + h \cdot \left. \frac{d\vec{z}_0}{dt} \right|_{R_0} + \frac{dR}{dt} \cdot \vec{y}_1 + R \cdot \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right|_{R_0} + \frac{dL}{dt} \cdot \vec{y}_2 + L \cdot \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{R_0} \\ &= h \cdot \left. \frac{d\vec{z}_0}{dt} \right|_{R_0} + R \cdot \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right|_{R_0} + L \cdot \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{R_0} \\ \left. \frac{d\vec{z}_0}{dt} \right|_{R_0} &= \vec{0} \text{ car } \vec{z}_0 \text{ est un vecteur fixe dans la base } R_0. \\ \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right|_{R_0} &= \left. \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right|_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1 = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\theta}(t) \cdot \vec{x}_1 \\ \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{R_0} &= \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_0} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\theta}(t) \cdot \vec{z}_0 + \dot{\beta}(t) \cdot \vec{x}_1) \wedge \vec{y}_2 = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{z}_1 \wedge \vec{y}_2 + \dot{\beta}(t) \cdot \vec{x}_2 \wedge \vec{y}_2 \\ \left. \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right|_{R_0} &= -\dot{\theta}(t) \cdot \cos(\beta) \cdot \vec{x}_1 + \dot{\beta}(t) \cdot \vec{z}_2 \end{aligned}$$

Soit :

$$\vec{V}_{C/R_0} = -(R + L \cdot \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{x}_1 + L \cdot \dot{\beta}(t) \cdot \vec{z}_2$$

Question 7 : Calculer $\vec{\Gamma}_{C/R_0}$.

Par définition, $\vec{\Gamma}_{C/R_0}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{C/\mathcal{R}_0} &= \left. \frac{d\vec{V}_{C/\mathcal{R}_0}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \left. \frac{d(-(R + L \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta}(t) \cdot \vec{x}_1 + L \cdot \dot{\beta}(t) \cdot \vec{z}_2)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \\ \vec{\Gamma}_{C/\mathcal{R}_0} &= -\frac{d(R + L \cos(\beta))}{dt} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_1 - (R + L \cos(\beta)) \cdot \frac{d(\dot{\theta})}{dt} \cdot \vec{x}_1 - (R + L \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta} \cdot \left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + L \cdot \frac{d\dot{\beta}}{dt} \cdot \vec{z}_2 + L \cdot \dot{\beta} \cdot \left. \frac{d\vec{z}_2}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \\ \vec{\Gamma}_{C/\mathcal{R}_0} &= L \sin(\beta) \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_1 - (R + L \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta} \cdot \left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} + L \cdot \dot{\beta} \cdot \left. \frac{d\vec{z}_2}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \\ \left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} &= \left. \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right|_{\mathcal{R}_1} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{y}_1 \\ \left. \frac{d\vec{z}_2}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} &= \left. \frac{d\vec{z}_2}{dt} \right|_{\mathcal{R}_2} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\theta}(t) \cdot \vec{z}_0 + \dot{\beta}(t) \cdot \vec{x}_1) \wedge \vec{z}_2 = \dot{\theta}(t) \cdot \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_2 + \dot{\beta}(t) \cdot \vec{x}_2 \wedge \vec{z}_2 \\ \left. \frac{d\vec{z}_2}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} &= \dot{\theta}(t) \cdot \sin(\beta) \cdot \vec{x}_1 - \dot{\beta}(t) \cdot \vec{y}_2\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{C/\mathcal{R}_0} &= L \sin(\beta) \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_1 - (R + L \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_1 + L \cdot \dot{\beta} \cdot (\dot{\theta}(t) \cdot \sin(\beta) \cdot \vec{x}_1 - \dot{\beta}(t) \cdot \vec{y}_2) \\ \vec{\Gamma}_{C/\mathcal{R}_0} &= (2 \cdot L \sin(\beta) \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\theta}) \cdot \vec{x}_1 - (R + L \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_1 - L \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \vec{y}_2\end{aligned}$$

Question 8 : Montrer que le vecteur accélération $\vec{\Gamma}_{C/\mathcal{R}_0}$ est donné dans le référentiel $\mathcal{R}_2$ par :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_{C/\mathcal{R}_0} &= \left. \begin{array}{c} 2 \cdot L \sin(\beta) \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\theta} \\ -L \cdot \dot{\beta}^2 - (R + L \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\beta) \\ (R + L \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\beta) \end{array} \right|_{\mathcal{R}_2} \\ \vec{\Gamma}_{C/\mathcal{R}_0} &= (2 \cdot L \sin(\beta) \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\theta}) \cdot \vec{x}_1 - (R + L \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_1 - L \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \vec{y}_2 \\ \vec{\Gamma}_{C/\mathcal{R}_0} &= (2 \cdot L \sin(\beta) \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\theta}) \cdot \vec{x}_2 - (R + L \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_1 - L \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \vec{y}_2\end{aligned}$$

Or $\vec{y}_1 = \cos(\beta) \cdot \vec{y}_2 - \sin(\beta) \cdot \vec{z}_2$, soit :

$$\vec{\Gamma}_{C/\mathcal{R}_0} = \left. \begin{array}{c} 2 \cdot L \sin(\beta) \cdot \dot{\beta} \cdot \dot{\theta} \\ -L \cdot \dot{\beta}^2 - (R + L \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos(\beta) \\ (R + L \cos(\beta)) \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin(\beta) \end{array} \right|_{\mathcal{R}_2}$$

Question 9 : Pour quelles valeurs β_{max} de β l'accélération latérale est-elle maximale en norme ?

Graphiquement on mesure sur la figure :

$$\beta_{max} = \pm 0,97 \text{ rad}$$

Question 10 : Pour cette valeur β_{max} de β , déterminer la valeur maximale de la vitesse $\dot{\theta}_{max}$ admissible au regard de la norme sur les attractions à sensations. Faire l'application numérique et donner le résultat en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ puis en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

On veut

$$(R + L \cos(\beta_{max})) \cdot \dot{\theta}_{max}^2 \cdot \sin(\beta_{max}) = \text{Alat}_{max} \quad \text{avec } \text{Alat}_{max} = 0,98 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\dot{\theta}_{max} = \sqrt{\frac{\text{Alat}_{max}}{(R + L \cos(\beta_{max})) \cdot \sin(\beta_{max})}}$$

Application numérique :

$$\dot{\theta}_{max} = \sqrt{\frac{0,98}{(3 + 4,5 \cdot \cos(0,97)) \cdot \sin(0,97)}} = 0,46 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 4,42 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$$

Question 11 : En vous appuyant sur les courbes ci-dessus, conclure sur le respect des accélérations subies par les passagers au regard de la norme sur les attractions à sensations.

L'accélération suivant la colonne vertébrale reste inférieure à 1,3 g, elle respecte donc la norme qui de 3 g maximum,

L'accélération ventre / dos reste inférieure à 0,7 g, elle respecte donc la norme qui est de 2 g maximum,

L'accélération latérale est au maximum de 1 g, ce qui correspond au maximum admissible par la norme.

En conclusion la norme est donc bien respectée.

Question 12 : Justifier que l'accélération angulaire $\ddot{\theta}(t)$ est constante pour $t \in [t_0; t_1]$? En supposant que l'accélération $\ddot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_{max}$ pour $t \in [t_0; t_1]$, en déduire le temps t_1 en fonction des données.

La vitesse de rotation $\dot{\theta}(t)$ croît linéairement pour $t \in [t_0; t_1]$, on a donc :

$$\ddot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_{max} = \text{cste}$$

Par intégration, on a :

$$\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_{max} \cdot t$$

A $t = t_1$, on a :

$$\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_{max} \cdot t_1 = \dot{\theta}_{max}$$

Soit :

$$t_1 = \frac{\dot{\theta}_{max}}{\ddot{\theta}_{max}}$$

Application numérique :

$$t_1 = \frac{0,46}{0,08} = 5,75 \text{ s}$$

Question 13 : Déterminer la position angulaire $\theta(t)$ pour $t \in [t_0; t_1]$ et pour $t \in [t_1; t_1 + t_2]$ en fonction de $\dot{\theta}_{max}$ et t_1 .

Pour $t \in [t_0; t_1]$, la vitesse $\dot{\theta}(t)$ croît linéairement, on a donc :

$$\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_{max} \cdot t$$

On en déduit en intégrant :

$$\theta(t) = \ddot{\theta}_{max} \cdot \frac{t^2}{2} + cste$$

La constante d'intégration est nulle car $\theta(t_0) = 0$.

$$\theta(t) = \ddot{\theta}_{max} \cdot \frac{t^2}{2}$$

Pour $t \in [t_1; t_1 + t_2]$, la vitesse $\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_{max}$ est constante. En intégrant, on a :

$$\theta(t) = \dot{\theta}_{max} \cdot t + cste$$

On trouve la constante d'intégration en écrivant que $\theta(t_1) = \ddot{\theta}_{max} \cdot \frac{t_1^2}{2}$ par continuité avec l'intervalle de temps $t \in [t_0; t_1]$.

$$\theta(t) = \dot{\theta}_{max} \cdot t + \ddot{\theta}_{max} \cdot \frac{t_1^2}{2} - \dot{\theta}_{max} \cdot t_1$$

Question 14 : Déterminer le temps t_2 afin de respecter les données du problème.

Par la méthode rapide :

On veut que l'attraction fasse 7 tours pour $t \in [t_1; t_1 + t_2]$ à la vitesse $\dot{\theta}_{max} = 4,42 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Soit :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{max} \cdot t_2 &= \Delta\theta = 3 \text{ tr} \\ t_2 &= \frac{\Delta\theta}{\dot{\theta}_{max}} \cdot 60 = \frac{3}{4,42} \cdot 60 = 40,7 \text{ s} \end{aligned}$$

En utilisant ce qui précède :

On veut :

$$\theta(t_1 + t_2) - \theta(t_1) = \Delta\theta = 3 \text{ tr}$$

Or :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \theta(t_1 + t_2) &= \dot{\theta}_{max} \cdot (t_1 + t_2) + \ddot{\theta}_{max} \cdot \frac{t_1^2}{2} - \dot{\theta}_{max} \cdot t_1 \\ \theta(t_1) &= \ddot{\theta}_{max} \cdot \frac{t_1^2}{2} \end{aligned} \right. \\ \Delta\theta &= \dot{\theta}_{max} \cdot (t_1 + t_2) + \ddot{\theta}_{max} \cdot \frac{t_1^2}{2} - \dot{\theta}_{max} \cdot t_1 - \ddot{\theta}_{max} \cdot \frac{t_1^2}{2} = 3 \text{ tr} \\ \Delta\theta &= \dot{\theta}_{max} \cdot t_2 = 3 \text{ tr} \\ t_2 &= \frac{\Delta\theta}{\dot{\theta}_{max}} \cdot 60 = \frac{3}{4,42} \cdot 60 = 40,7 \text{ s} \end{aligned}$$

Question 15 : En déduire le temps de cycle T_{cycle} total de l'attraction. Est-il conforme à la durée de l'attraction annoncée dans la présentation ?

D'après la figure d'un cycle complet, on a :

$$T_{cycle} = 6 \cdot t_1 + 3 \cdot t_2 = 6 \cdot 5,75 + 3 \cdot 40,7 = 156,7 \text{ s} = 2 \text{ min } 36,7 \text{ s}$$

On obtient bien une durée comprise entre 2 et 3 min conformément à ce qui est annoncé dans la présentation de l'attraction.