DS02 – ROBOT SINTESI PHARMATHEK CORRIGE

INSTRUCTIONS

Durée 4h.
Calculatrice autorisée.
Les trois parties sont indépendantes. Il est conseillé de répartir votre temps de la façon suivante :

- 1h pour la partie B : Transport d'une boîte de médicament de la zone de stockage à la zone de délivrance,
- 2h pour la partie C : Réglage des asservissements de position
- 20 min pour la partie D : Bride de serrage.
- 40 min pour la partie E : Pompe hydraulique manuelle.

La partie D est à rédiger sur une copie séparée des deux autres.
Vous ferez attention à la lisibilité de ce que vous écrivez et à mettre en évidence les résultats et conclusion des questions.

Partie A : PRESENTATION

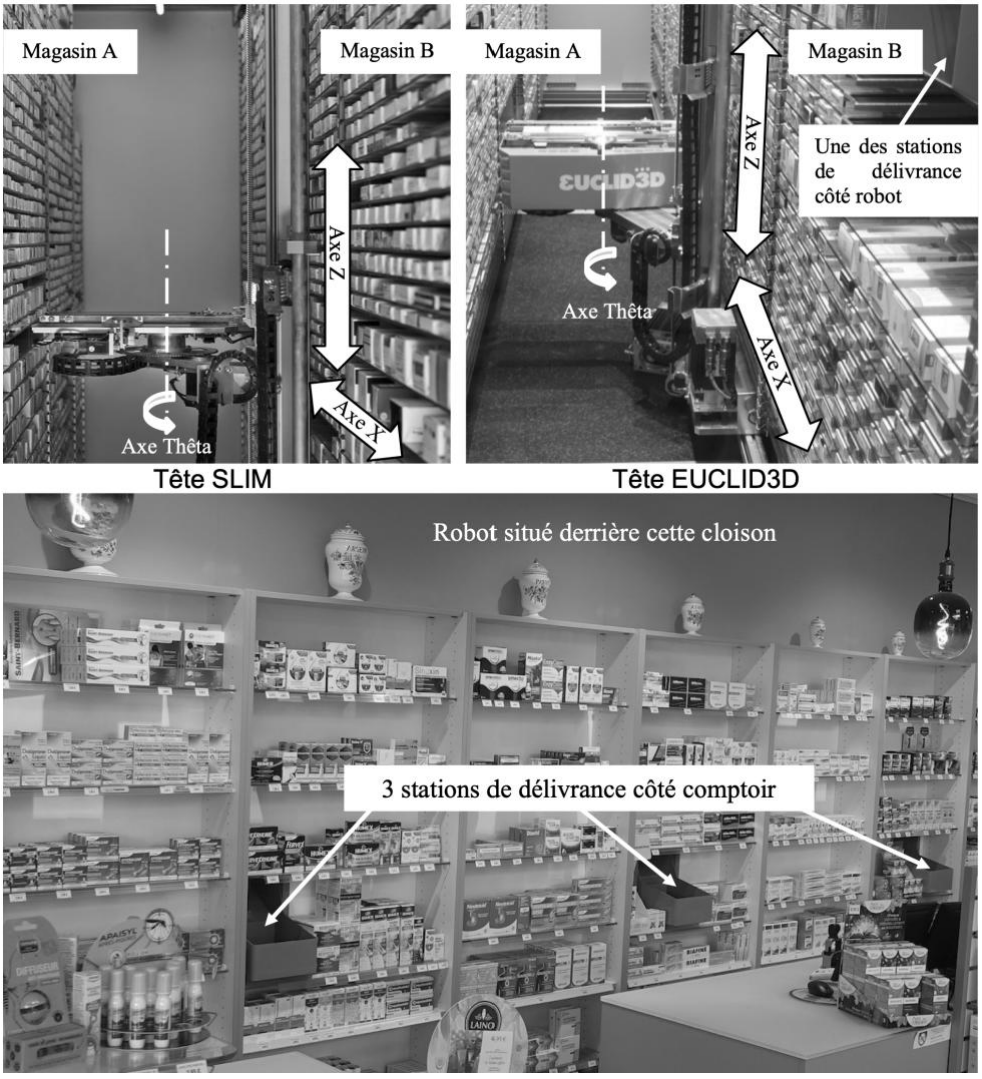


Figure 1 - Robot SINTESI avec un seul bras et sa tête SLIM ou sa tête EUCLID3D

Pharmathek, entreprise basée à Vérone en Italie et implantée en France dans la région de Nancy, a mis au point un robot de stockage, de rangement et de délivrance des ordonnances, permettant aux pharmacies équipées de s'affranchir de la pénibilité de la gestion manuelle des boîtes de médicaments.

Les missions du robot SINTESI sont de diminuer le nombre d'aller-retours effectués par les collaborateurs en pharmacie entre le comptoir et les tiroirs de stockage des médicaments, de faciliter le stockage des références qui arrivent chaque jour et d'augmenter le temps de présence et de conseil aux patients.

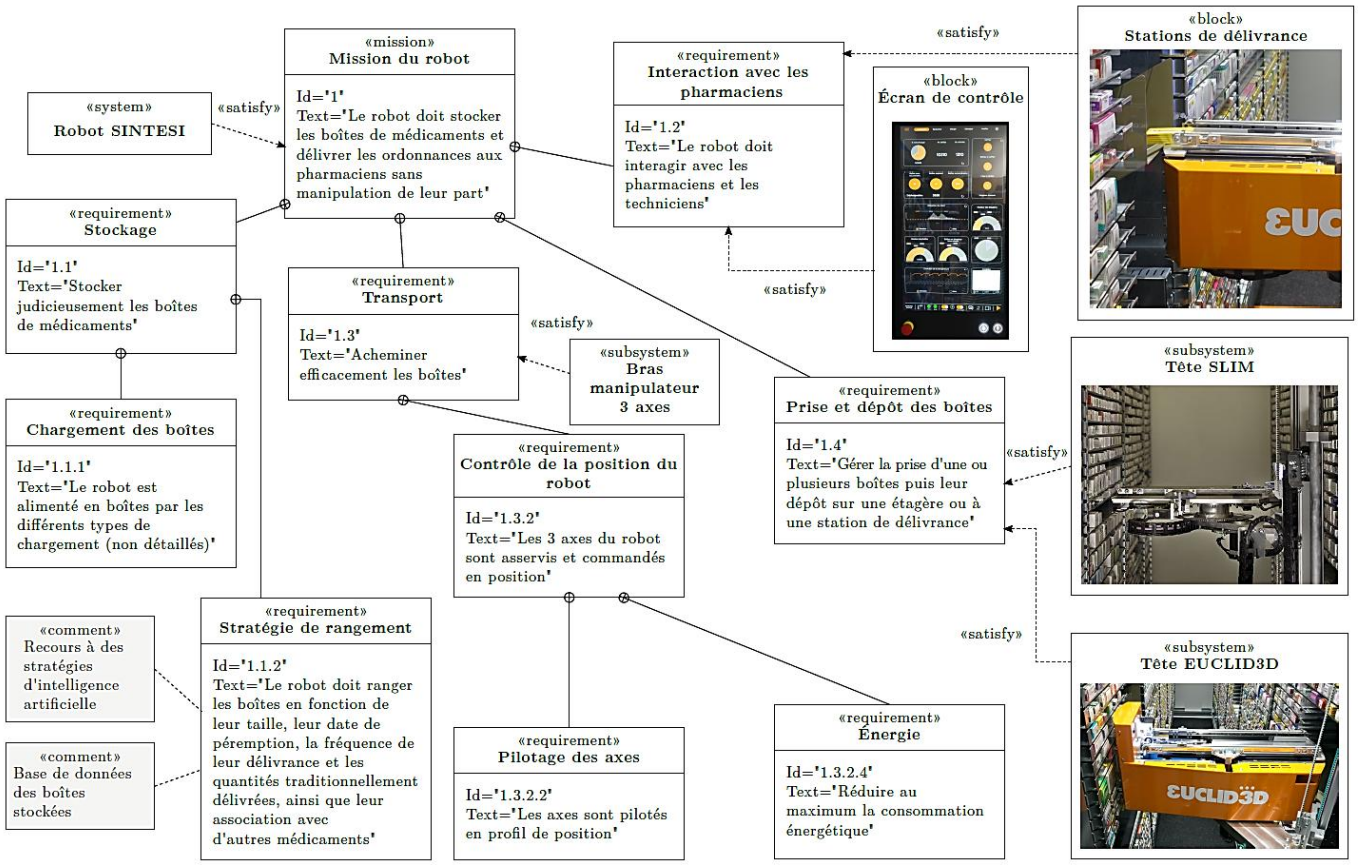
Remarque : afin de respecter la confidentialité de ce système, les données et résultats présentés dans ce sujet sont approchés et limitatifs par rapport à la solution industrielle réelle.

Le robot SINTESI Figure 1 se présente sous la forme d'un couloir d'environ 60 cm de large, bordé à gauche et à droite par deux magasins de stockage. Chaque magasin possède des étagères en verre de différentes hauteurs avec une profondeur utile de stockage d'environ 35 cm. Le robot comporte ensuite un ou deux bras manipulateurs trois axes (ici un seul bras situé sur la droite de la photo), munis d'une tête de manipulation des boîtes dont deux versions sont proposées : la tête SLIM ou la tête EUCLID3D.

Le chargement des boîtes de médicaments dans le robot est hors du cadre de cette étude.

Ce sujet a pour but d'élaborer un modèle de simulation devant permettre d'apporter une aide décisionnelle sur le choix de la tête à implanter. Les résultats de simulation devront faire apparaître les écarts de performances du robot muni d'une tête simple (nommée SLIM) vis-à-vis d'une tête plus perfectionnée (nommée EUCLID3D).

Le robot SINTESI doit répondre aux exigences de la Figure 2 qui seront validées tout au long du sujet.



Exigence	Performance	Niveau
Pilotage des axes	Précision des axes X et Z	Erreur en régime permanent pour une consigne en échelon $\leq 0{,}5\ mm$
		Erreur de traînage en régime permanent pour une consigne en rampe (vitesse maximale) $\leq 50\ mm$
	Stabilité des asservissements de position	Marge de phase minimale de 45°
		Dépassement de l'axe X inférieur à 20%
	Vitesse des axes X et Z	Vitesse maximale $v_{max} = 2{,}5\ m.s^{-1}$
	Vitesse de l'axe Théta	Vitesse maximale $\dot{\theta}_{max} = 100°.s^{-1}$
	Accélération des axes X et Z	Accélération maximale $a_{max} = 2\ m.s^{-2}$
	Accélération de l'axe Théta	Accélération maximale $\ddot{\theta}_{max} = 400°.s^{-2}$
	Temps de déplacement	$< 4\ s$ pour un déplacement de 2,7 m sur l'axe $\vec{x}$

Figure 2 - Diagramme et tableau des exigences partielles du robot SINTESI

Partie B : TRANSPORT D'UNE BOITE DE MEDICAMENT DE LA ZONE DE STOCKAGE A LA ZONE DE DELIVRANCE

Objectifs

- Valider les paramètres de déplacement permettant d'assurer une préhension satisfaisante de la boîte de médicament pendant le transport.
- Déterminer le temps de transport d'une boîte de médicament de la zone de stockage à la zone de délivrance.

B1 Vérification des paramètres de déplacement sur le robot

Une campagne de mesures, à l'aide d'un accéléromètre (nommé module AHRS - Attitude and Heading Reference System - sur) placé sur la tête EUCLID3D, a été effectuée pour un déplacement type (de la zone de stockage à la zone de délivrance) du robot. Après filtrage des mesures obtenues on trace les courbes Figure 3.

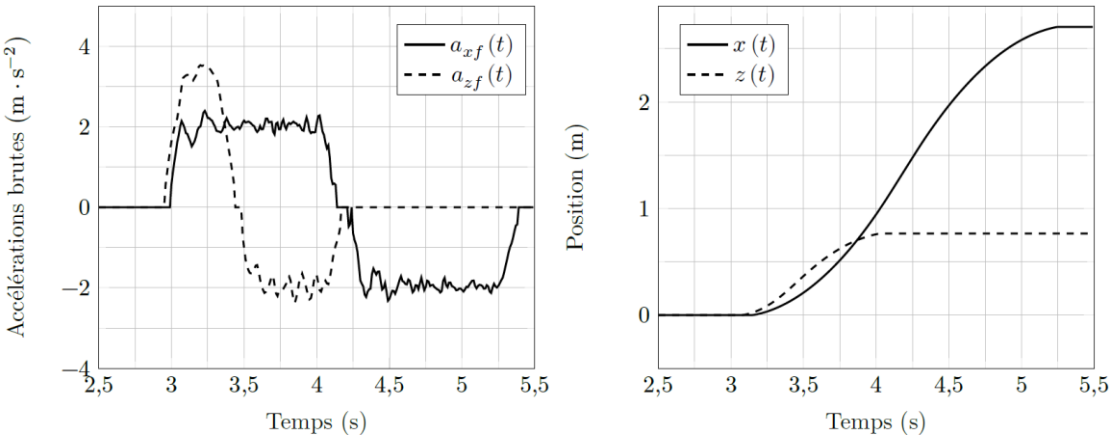
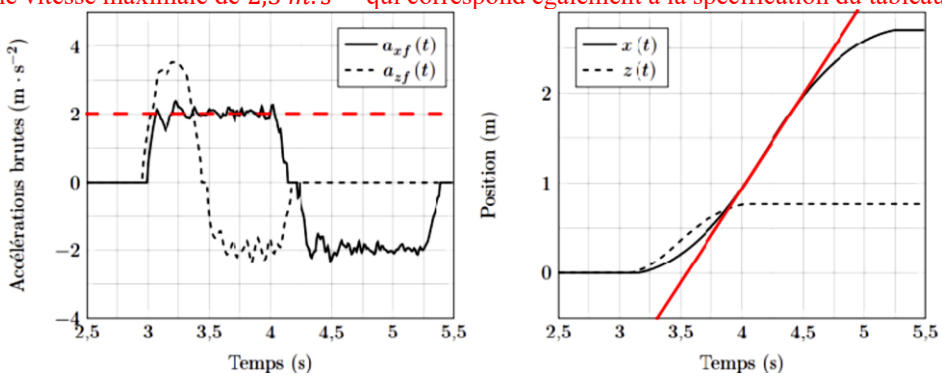


Figure 3 – Courbes d'accélération et de position d'une boîte de médicament au cours du transport

Question 1 : À l'aide de la Figure 3, estimer les valeurs maximales des accélérations et des vitesses mesurées selon $\vec{x}$. Analyser les différences entre les résultats de mesures et les spécifications figurant dans le tableau des exigences Figure 2.

Sur la courbe d'accélération on relève une accélération maximale moyenne de 2 $m.s^{-2}$, ce qui correspond bien à la spécification du tableau des exigences.
Sur la courbe de position, on peut estimer la vitesse avec la pente de la tangente au point d'inflexion (qui correspond à la vitesse maximale). On a une vitesse maximale de 2,5 $m.s^{-1}$ qui correspond également à la spécification du tableau des exigences.



B2 Assurer la préhension de la boîte de médicament pendant le transport

Le robot SINTESI saisit les boîtes de médicament à l'aide d'une pince. Les boîtes sont donc maintenues par adhérence entre la boîte et la pince lors du déplacement. Les boîtes étant fragiles, l'effort de serrage exercé par la pince est limité au minimum afin de ne pas les détériorer. Une étude de dynamique sur la pince et une boîte type de médicament a permis de déterminer l'accélération limite maximale que peu supporter la boîte de médicament au cours du mouvement sans risque que la boîte de médicament glisse de la pince. Ces résultats sont donnés dans le Tableau 1.

Tableau 1 – Accélérations limite que peut accepter la boîte de médicament pendant son transport

Accélération limite de la boîte selon $\vec{x}_3$	2,5 $m.s^{-2}$
Accélération limite de la boîte selon $\vec{y}_3$	Aucune (pas de risque de glissement selon $\vec{y}_3$)
Accélération limite de la boîte selon $\vec{z}_3$	2,5 $m.s^{-2}$

Le schéma cinématique Figure 4 du robot SINTESI donne sa structure cinématique. Il est composé :

- D'un bâti 0 auquel est associé un référentiel $\mathcal{R}_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$,
- D'un chariot 1 en liaison glissière avec le bâti 0, de sorte que le mouvement du chariot 1 par rapport au bâti 0 est une translation de direction $\vec{x}_0$,
- D'un chariot 2 en liaison glissière avec le chariot 1, de sorte que le mouvement du chariot 2 par rapport au chariot 1 est une translation de direction $\vec{z}_0$,
- D'un bras d'escamotage 3 auquel est associé un référentiel $\mathcal{R}_3(D,\vec{x}_3,\vec{y}_3,\vec{z}_3)$. Ce bras est en liaison pivot avec le chariot 2, de sorte que le mouvement du bras 3 par rapport au chariot 2 est une rotation d'axe $(C,\vec{z}_0)$, Ce bras est en position $\theta_1 = 90°$ lors de la saisie dans la zone de stockage ou la dépose dans la zone de délivrance d'une boîte et en position $\theta_0 = -10°$ lors du déplacement afin d'éviter tout risque de collision. La phase d'escamotage a lieu en même temps que le début de la phase de transport,
- La boîte de médicament est placée au point C.

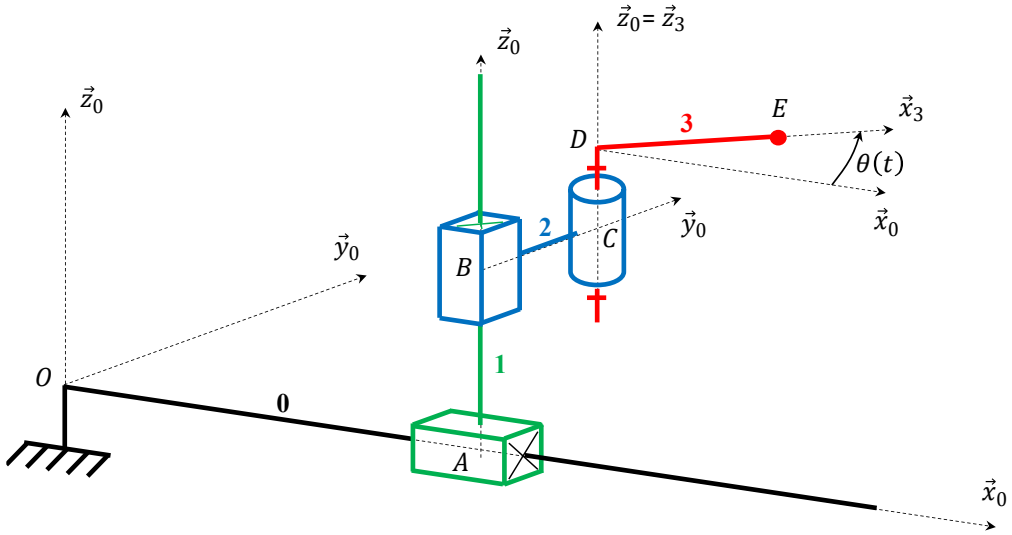


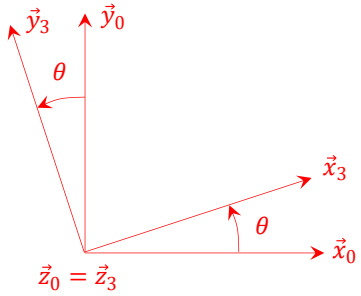
Figure 4 – Schéma cinématique du robot SINTESI

Données :

$\overrightarrow{OA} = x(t).\vec{x}_0 \quad \overrightarrow{AB} = z(t).\vec{z}_0 \quad \overrightarrow{BC} = L.\vec{y}_0 \quad \overrightarrow{CD} = h.\vec{z}_0 \quad \overrightarrow{DE} = R.\vec{x}_3 \quad \theta(t) = (\vec{x}_0,\vec{x}_3) = (\vec{y}_0,\vec{y}_3)$

Question 2 : Tracer la figure de changement de base et donner le vecteur rotation correspondant.

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}(t).\vec{z}_0$$



Question 3 : Donner le vecteur position du point E par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$.

Le vecteur position de E par rapport au référentiel $\mathcal{R}_0$ est donné par :

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$$

$$\overrightarrow{OE} = x(t).\vec{x}_0 + z(t).\vec{z}_0 + L.\vec{y}_0 + h.\vec{z}_0 + R.\vec{x}_3$$

Question 4 : Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}_{E/\mathcal{R}_0}$.

Par définition :

$$\vec{V}_{E/\mathcal{R}_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{OE}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{dx(t).\vec{x}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{dz(t).\vec{z}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{dL.\vec{y}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{dh.\vec{z}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{dR.\vec{x}_3}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

$$\vec{V}_{E/\mathcal{R}_0} = \dot{x}(t).\vec{x}_0 + x(t).\left.\frac{d\vec{x}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + \dot{z}(t).\vec{z}_0 + z(t).\left.\frac{d\vec{z}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + L.\left.\frac{d\vec{y}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + h.\left.\frac{d\vec{z}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + R.\left.\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

$\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$ et $\vec{z}_0$ sont fixes dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ donc :

$$\left.\frac{d\vec{x}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{d\vec{z}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{d\vec{y}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{0}$$

$$\left.\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right|_{\mathcal{R}_3} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{x}_3 = \dot{\theta}(t).\vec{z}_0 \wedge \vec{x}_3 = \dot{\theta}(t).\vec{z}_3 \wedge \vec{x}_3 = \dot{\theta}(t).\vec{y}_3$$

On obtient :

$$\boxed{\vec{V}_{E/\mathcal{R}_0} = \dot{x}(t).\vec{x}_0 + \dot{z}(t).\vec{z}_0 + R.\dot{\theta}(t).\vec{y}_3}$$

Question 5 : Montrer que le vecteur accélération $\vec{\Gamma}_{E/\mathcal{R}_0}$ s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_{E/\mathcal{R}_0} = \ddot{x}(t).\vec{x}_0 + \ddot{z}(t).\vec{z}_0 + R.\ddot{\theta}(t).\vec{y}_3 - R.\dot{\theta}^2(t).\vec{x}_3$$

Par définition :

$$\vec{\Gamma}_{E/\mathcal{R}_0} = \left.\frac{d\vec{V}_{E/\mathcal{R}_0}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{d\dot{x}(t).\vec{x}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{d\dot{z}(t).\vec{z}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{dR.\dot{\theta}(t).\vec{y}_3}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

$$\vec{\Gamma}_{E/\mathcal{R}_0} = \left.\frac{d\vec{V}_{E/\mathcal{R}_0}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \ddot{x}(t).\vec{x}_0 + \dot{x}(t).\left.\frac{d\vec{x}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + \ddot{z}(t).\vec{z}_0 + \dot{z}(t).\left.\frac{d\vec{z}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} + R.\ddot{\theta}(t).\vec{y}_3 + R.\dot{\theta}(t).\left.\frac{d\vec{y}_3}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

$\vec{x}_0$ et $\vec{z}_0$ sont fixes dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ donc :

$$\left.\frac{d\vec{x}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{d\vec{z}_0}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{0}$$

$$\left.\frac{d\vec{y}_3}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{d\vec{y}_3}{dt}\right|_{\mathcal{R}_3} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_3/\mathcal{R}_0} \wedge \vec{y}_3 = \dot{\theta}(t).\vec{z}_0 \wedge \vec{y}_3 = \dot{\theta}(t).\vec{z}_3 \wedge \vec{y}_3 = -\dot{\theta}(t).\vec{x}_3$$

On obtient :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_{E/\mathcal{R}_0} = \ddot{x}(t).\vec{x}_0 + \ddot{z}(t).\vec{z}_0 + R.\ddot{\theta}(t).\vec{y}_3 - R.\dot{\theta}^2(t).\vec{x}_3}$$

Question 6 : Donner ce vecteur accélération $\vec{\Gamma}_{E/\mathcal{R}_0}$ dans la base $\mathcal{B}_3(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$.

Par projection dans la base $\mathcal{B}_3$ on a :

$$\vec{x}_0 = cos(\theta).\vec{x}_3 - sin(\theta).\vec{y}_3$$
$$\vec{z}_0 = \vec{z}_3$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_{E/\mathcal{R}_0} = \begin{vmatrix} \ddot{x}(t).cos(\theta) - R.\dot{\theta}^2(t) \\ -\ddot{x}(t).sin(\theta) + R.\ddot{\theta}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{vmatrix}_{\mathcal{B}_3}}$$

On donne Figure 5 les courbes des accélérations selon $\vec{x}_3, \vec{y}_3$ et $\vec{z}_3$ dans le cas le plus défavorable (pour $\dot{\theta}$, $\ddot{x}$ et $\ddot{z}$ maximum) en fonction de la position angulaire θ du bras escamotable.

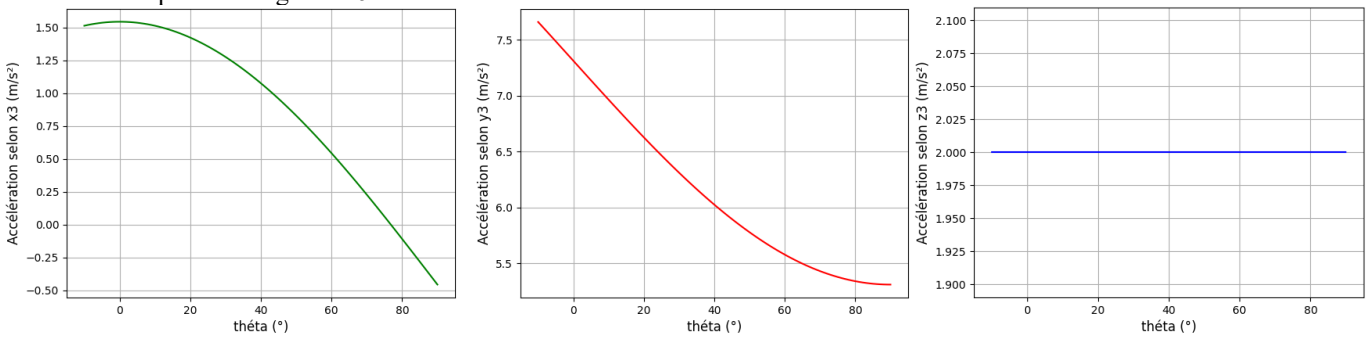


Figure 5 – Accélération de la boîte de médicament selon $\vec{x}_3, \vec{y}_3$ et $\vec{z}_3$

Question 7 : Pour quelle position θ l'accélération subie par la boîte de médicament est-elle la plus défavorable ? Conclure sur le risque de glissement de la boîte de médicament dans la pince au cours du transport.

Vis-à-vis du risque de glissement de la boîte, seules les accélérations selon $\vec{x}_3$ et $\vec{z}_3$ sont importantes :

- L'accélération selon $\vec{x}_3$ est maximum pour $\theta = 0$ et ne dépasse pas $2{,}5\ m.s^{-2}$. Il n'y a donc pas de risque de glissement selon $\vec{x}_3$,
- L'accélération selon $\vec{z}_3$ est constante et vaut $2\ m.s^{-2} < 2{,}5\ m.s^{-2}$. Il n'y a donc pas de risque de glissement selon $\vec{z}_3$.

B3 Temps de transport d'une boîte de la zone de stockage à la zone de délivrance

Le profil de pilotage utilisé par le constructeur suit un profil en trapèze des vitesses. Dans le cas de l'amplitude de déplacement étudiée de $2{,}7\ m$, ce profil se simplifie en un triangle des vitesses symétrique ($t_1 = t_2$, voir Figure 6) puisque la vitesse maximale ne peut pas être obtenue pendant le déplacement limité de $2{,}7\ m$.

Les valeurs des accélérations utilisées sont les accélérations maximales spécifiées dans le tableau des exigences. On considère l'origine des temps au début du mouvement.

Question 8 : Tracer sur le document réponse les allures des évolutions temporelles de l'accélération $a_x(t)$ et du déplacement $x(t)$ en précisant les valeurs caractéristiques en fonction de t_1, t_2 et v_1.

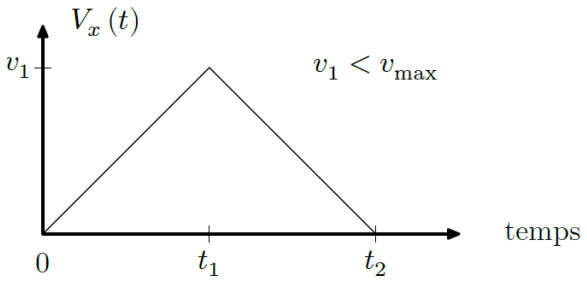
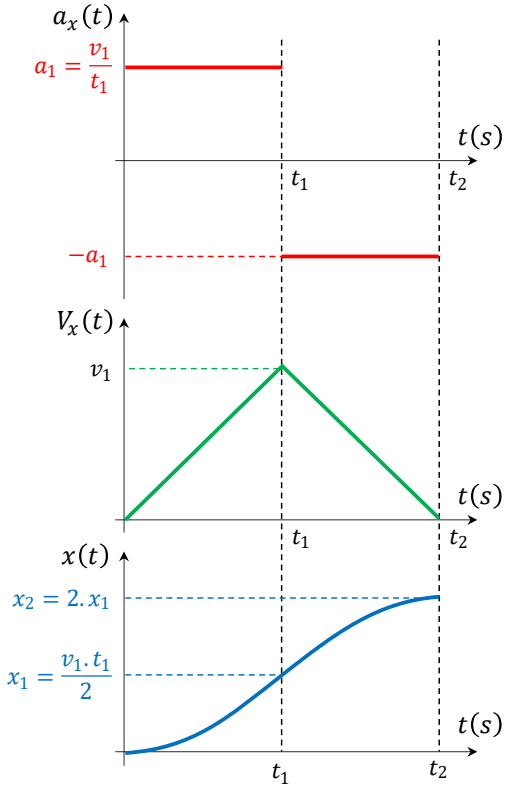


Figure 6 – Profil simplifié des vitesses utilisé



Question 9 : Après avoir déterminé v_1 en fonction de a_{max} et t_1, déterminer le temps de mouvement t_2 permettant d'effectuer 2,7 m selon $\vec{x}$ avec ce profil des vitesses.

Pour $t\epsilon[0; t_1]$, la vitesse est linéaire et vaut :

$$v(t) = \frac{v_1}{t_1}.t$$

L'accélération est donc :

$$\boxed{v_1 = a_{max}.t_1}$$

On veut $x(t) = x_2 = 2{,}7\ m$. Or $x_2 = 2.x_1 = 2.x(t_1)$:
Pour $t\epsilon[0; t_1]$:

$$x(t) = \frac{v_1}{2.t_1}.t^2 + cste$$

En supposant que la position initiale est nulle, on a :

$$x(t) = \frac{v_1}{2.t_1}.t^2 = \frac{v_1}{t_2}.t^2$$

$$x_2 = x(t_1) = \frac{v_1}{t_2}.t_1^2 = \frac{a_{max}.t_1}{t_2}.\left(\frac{t_2}{2}\right)^2 = \frac{a_{max}}{8}.t_2^2$$

Soit :

$$\boxed{t_2 = \sqrt{\frac{8.x_2}{a_{max}}}}$$

Application numérique :

$$t_2 = \sqrt{\frac{8.2{,}7}{2}} = 3{,}3\ s$$

Question 10 : Conclure par rapport aux exigences données dans le tableau Figure 2.

Le temps t_2 obtenu est inférieur à 3 s, donc l'exigence sur le temps de déplacement est bien respectée.

Partie C : REGLAGE DES ASSERVISSEMENTS DE POSITION



Objectifs

- Etudier la structure globale de la boucle d'asservissement en position de l'axe X,
- Modéliser le moteur et déterminer sa fonction de transfert,
- Identifier le comportement de la boucle de vitesse,
- Analyser la précision de l'asservissement en position.

Le robot Pharmathek réalise des déplacements suivant les axes X et Z en fonction des consignes de position issues d'un logiciel spécifique de traitement d'ordonnances. En fonction des boites demandées, celui-ci recherche dans sa base l'emplacement des différentes boites et envoie aux variateurs les consignes de déplacement. Le bon fonctionnement du système dépend du réglage du correcteur de position en termes de stabilité et de suivi de consigne.
L'étude qui suit se limite au dimensionnement du correcteur de l'axe X. Bien que le traitement soit numérique, la période de traitement sera considérée très petite par rapport aux constantes de temps du système afin de traiter le problème avec les outils des systèmes linéaires continus et invariants.

C1 Analyse de la structure de l'asservissement en position

La structure globale de la boucle de position (documentation constructeur) est donnée à la Figure 7.

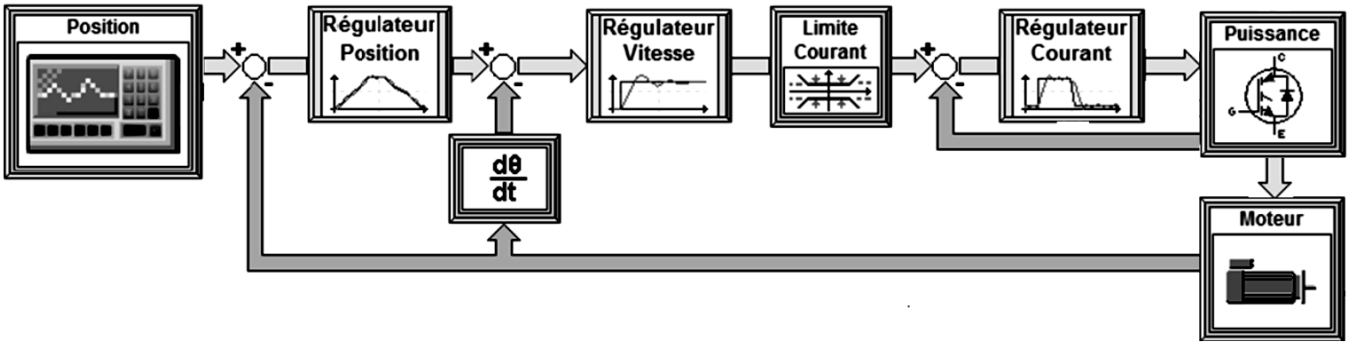


Figure 7 – Structure de la boucle de position du variateur donnée par le constructeur

Question 11 : Le schéma Figure 7 montre trois boucles d'asservissement imbriquées. Identifier et nommer ces trois boucles d'asservissement.

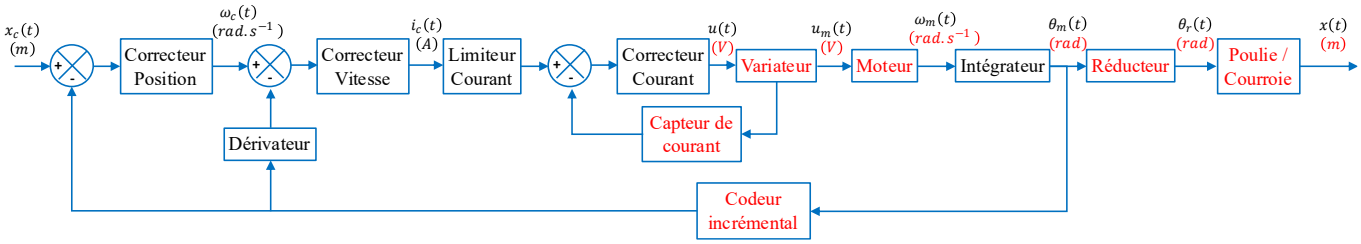
Le schéma Figure 7 fait apparaître 3 boucles d'asservissement :

- Une boucle principale d'asservissement en position, dont la mesure est assurée par le codeur incrémental et la correction par le régulateur de position,
- Une boucle secondaire d'asservissement en vitesse, inclue dans la boucle de position, dont la mesure est assurée par le codeur incrémental également et la correction par le régulateur de vitesse,
- Une troisième boucle, inclue dans la boucle de vitesse, réalise un asservissement en courant. La mesure est assurée par un capteur de courant et la correction par le régulateur de courant.

En plus des composants indiqués sur le schéma Figure 7, la chaîne d'asservissement en position comporte également :

- Un capteur de courant qui mesure le courant circulant dans le moteur,
- Un codeur incrémental qui assure la mesure de la vitesse angulaire et de la position angulaire du moteur,
- Le bloc de puissance est assuré par un variateur du type hacheur quatre quadrants qui permet de piloter le moteur dans les deux sens de rotation,
- Un réducteur en sortie du moteur permet d'adapter la vitesse au reste de la chaîne cinématique,
- Enfin un système poulie courroie permet de transformer la vitesse de rotation en sortie du réducteur en une vitesse de translation du chariot mobile de l'axe X.

Question 12 : Compléter le schéma fonctionnel sur le document réponse. Préciser les unités des grandeurs entre les blocs pour lesquelles ce n'est pas déjà fait.



Question 13 : Identifier le préactionneur, l'actionneur, le (ou les) transmetteur ainsi que l'effecteur.

- Le préactionneur est le variateur,
- L'actionneur est le moteur,

- Les transmetteurs sont le réducteur et le système poulie/courroie,
- L'effecteur est le chariot.

Question 14 : Quel est le rôle du bloc « Limite Courant » (ou limiteur courant).

Le bloc limiteur de courant sert à protéger le moteur d'une surintensité. En effet, l'intensité circulant dans un moteur ne peut pas dépasser une limite imposée par le fabricant du moteur, car au-delà de cette intensité limite, les bobinages du moteur surchauffent ce qui peut conduire à la destruction du moteur.
Si la consigne de courant en sortie du bloc « correcteur de vitesse » dépasse cette limite alors le bloc « limiteur courant » limite la consigne à la valeur de courant maximale acceptable par le moteur.

C2 Modélisation du moteur

Le moteur à courant continu est modélisé par les équations données ci-dessous,

$$u_m(t) - e(t) = R.i(t)$$
$$e(t) = K_e.\omega_m(t)$$
$$c_m(t) = J.\frac{d\omega_m(t)}{dt}$$
$$c_m(t) = K_t.i(t)$$

Avec :

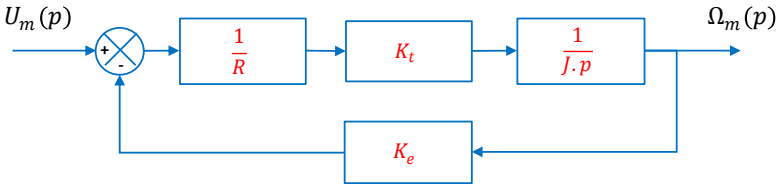
$u_m(t)$	tension d'entrée,	$\omega_m(t)$	fréquence de rotation du moteur,
$e(t)$	tension au bornes du moteur,	$c_m(t)$	couple moteur,
$i(t)$	courant dans l'induit,	R	résistance de l'induit.

Question 15 : Ecrire ces équations dans le domaine de Laplace.

On suppose les conditions initiales nulles :

$$\begin{matrix} u_m(t) - e(t) = R.i(t) \\ e(t) = K_e.\omega_m(t) \\ c_m(t) = J.\frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ c_m(t) = K_t.i(t) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} U_m(p) - E(p) = R.I(p) \\ E(p) = K_e.\Omega_m(p) \\ C_m(p) = J.p.\Omega_m(p) \\ C_m(p) = K_t.I(p) \end{matrix}$$

Question 16 : Compléter le schéma bloc du document réponse.



Question 17 : Par la méthode de votre choix, déterminer la fonction de transfert du moteur $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$. Quel est l'ordre de cette fonction de transfert ? La mettre sous forme canonique et préciser ses paramètres caractéristiques en fonction de R, K_e, K_t et J.

A partir du schéma bloc :

$$\left(U_m(p) - K_e.\Omega_m(p)\right).\frac{1}{R}.K_t.\frac{1}{J.p} = \Omega_m(p)$$
$$\frac{K_t}{R.J.p}.U_m(p) - \frac{K_e.K_t}{R.J.p}.\Omega_m(p) = \Omega_m(p)$$
$$\frac{K_t}{R.J.p}.U_m(p) = \Omega_m(p).\left(1 + \frac{K_e.K_t}{R.J.p}\right)$$
$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{K_t}{R.J.p}}{1 + \frac{K_e.K_t}{R.J.p}} = \frac{K_t}{K_e.K_t + R.J.p} = \frac{1}{K_e}.\frac{1}{1 + \frac{R.J}{K_e.K_t}.p}$$

A partir des équations :

$$C_m(p) = J.p.\Omega_m(p) \quad \Rightarrow \quad K_t.I(p) = J.p.\Omega_m(p)$$
$$\Rightarrow \quad K_t.\frac{1}{R}.\left(U_m(p) - E(p)\right) = J.p.\Omega_m(p)$$
$$\Rightarrow \quad K_t.\frac{1}{R}.\left(U_m(p) - K_e.\Omega_m(p)\right) = J.p.\Omega_m(p)$$
$$\Rightarrow \quad K_t.U_m(p) - K_e.K_t.\Omega_m(p) = R.J.p.\Omega_m(p)$$
$$\Rightarrow \quad K_t.U_m(p) = (K_e.K_t + R.J.p).\Omega_m(p)$$
$$H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K_t}{K_e.K_t + R.J.p} = \frac{1}{K_e}.\frac{1}{1 + \frac{R.J}{K_e.K_t}.p}$$

Il s'agit d'une fonction de transfert d'ordre 1, de gain statique : $K_m = \frac{1}{K_e}$ et de constante de temps : $\tau_m = \frac{R.J}{K_e.K_t}$.

C3 Identification du comportement de la boucle de vitesse

Les variateurs ont la possibilité d'être pilotés par un logiciel dédié. Deux essais, limités à la boucle de vitesse, avec des consignes en échelon de 300 et 1200 $tr.min^{-1}$ ont été réalisés afin d'établir un modèle simplifié de l'asservissement de vitesse. Les résultats des essais sont donnés à la Figure 8.

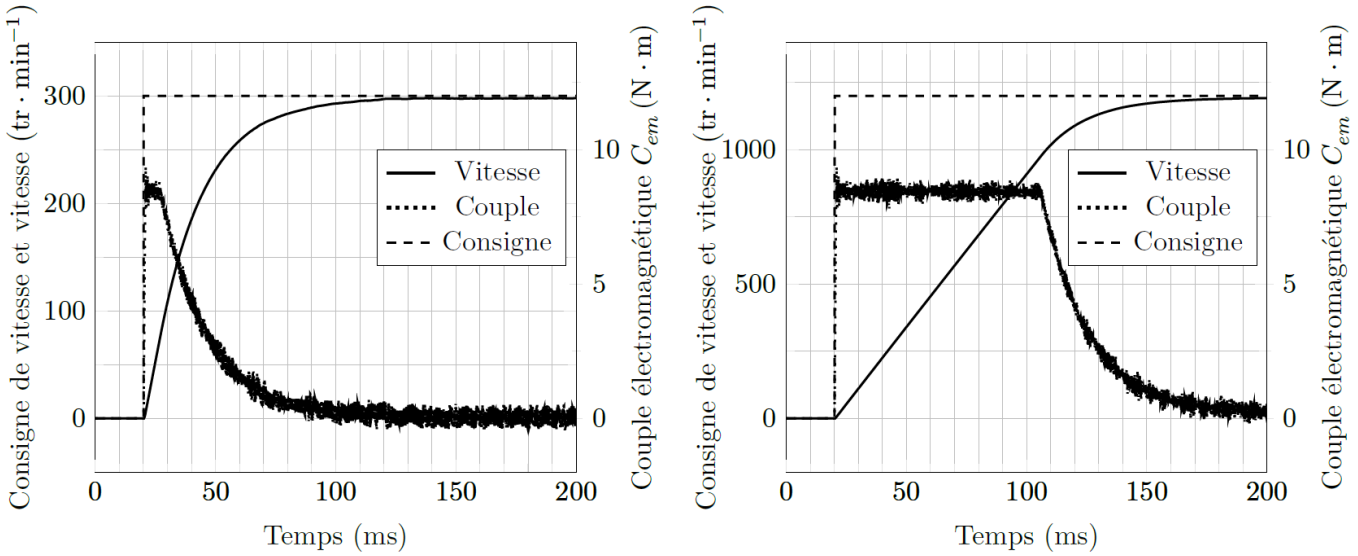


Figure 8 – Résultats des essais à un échelon de vitesse

NOTE Le couple est une grandeur d'effort mécanique. Pour faire simple, il s'agit d'une action mécanique qui tend à faire tourner l'objet sur lequel elle s'applique. Un moteur électrique fait tourner l'objet qu'il entraine, on dit donc qu'il exerce un couple. Le couple moteur correspond à la variable $c_m(t)$ dans les équations du moteur données en C2.

Question 18 : Comparer les courbes de couple des deux essais. En vous appuyant sur les équations du moteur ainsi que sur le schéma de la Figure 7, donner l'élément de la chaîne d'asservissement qui crée cette différence de comportement du couple moteur.

La différence principale entre les deux essais est la vitesse de consigne qui vaut 300 $tr.min^{-1}$ pour la courbe de gauche et 1200 $tr.min^{-1}$ pour la courbe de droite. Dans les deux cas la courbe de couple est totalement différente :

- Essai de gauche : la courbe de couple suit un comportement de type décharge d'un condensateur,
- Essai de droite : la courbe comporte un palier à 8 $N.m$ environ avant de suivre également un comportement de type décharge d'un condensateur. Ce palier correspond à un phénomène de saturation. Les équations montrent que le couple moteur est directement proportionnel à l'intensité qui circule dans le moteur. Cette saturation du couple correspond donc à une saturation de l'intensité induite par le limiteur de courant. En effet, en début de mouvement, la consigne de vitesse étant élevée, le régulateur de vitesse génère une consigne de courant qui est trop élevée pour être supportable par le moteur. Celle-ci est donc limitée jusqu'à ce qu'elle devienne raisonnable par le limiteur de courant…

Question 19 : Le comportement du couple observé sur le graphique de droite Figure 8 respecte-t-il les hypothèses du cours sur les SLCI ? Expliquer.

Lorsque le limiteur de courant est saturé, il n'y a plus proportionnalité entre l'entrée du limiteur de courant et sa sortie. Par conséquent le comportement du système n'est plus linéaire. Les hypothèses du cours, en particulier celle de linéarité, ne sont plus respectées.
La conséquence pour la suite est qu'il ne faut pas utiliser l'essai de droite pour identifier le comportement du moteur.
Pour la suite on utilisera uniquement la courbe de gauche Figure 8.

Question 20 : Proposer un modèle de fonction de transfert pour la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$. Justifier.

Pour l'essai de gauche, la courbe de réponse en vitesse est typique de celle d'un système du premier ordre :

- La tangente à l'origine est non nulle,
- On a une courbe de type charge d'un condensateur sans dépassement ni oscillations.

Par conséquent, on peut proposer une fonction de transfert du premier ordre de la forme :

$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K}{1+\tau.p}$$

Question 21 : Identifier les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_c(p)}$. Faire les tracés nécessaires sur le document réponse.

- Identification du gain K avec la valeur finale :

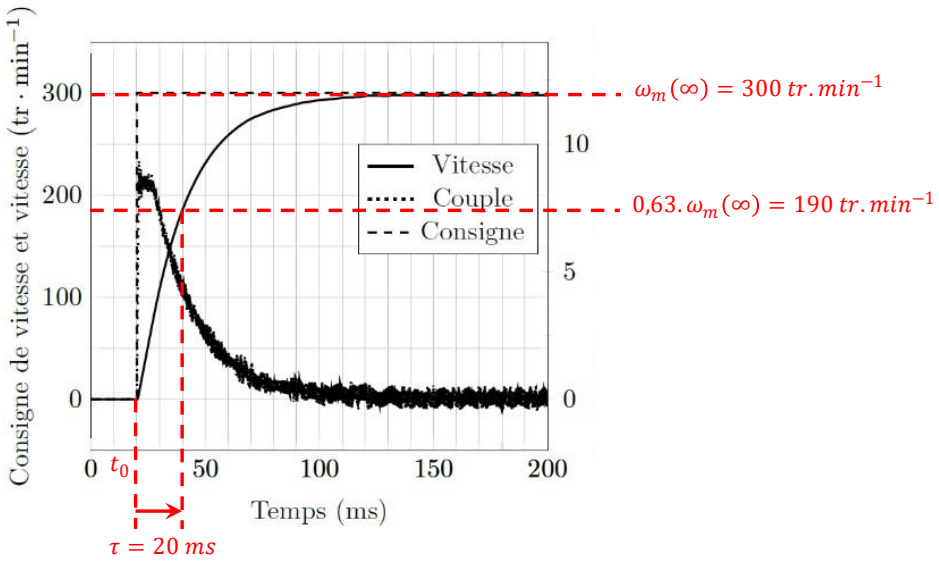
On sait que $\omega_m(\infty) = K.\omega_{c0}$. Avec $\omega_m(\infty) = 300\ tr.min^{-1}$ et $\omega_{c0} = 300\ tr.min^{-1}$, on en déduit :

$$\boxed{K = 1}$$

- Identification de τ :

Pour $t = t_0 + \tau$, on sait qu'on a $\omega_m(t_0 + \tau) = 0{,}63.\omega_m(\infty) = 190\ tr.min^{-1}$, on en déduit :

$$\boxed{\tau = 20\ ms}$$



C4 Etude de la précision de l'asservissement en position

Pour l'étude du correcteur de position, l'asservissement de position non perturbé peut se modéliser par le schéma bloc donné à la Figure 9 dans lequel la boucle de vitesse est remplacée par sa fonction de transfert $H(p)$.

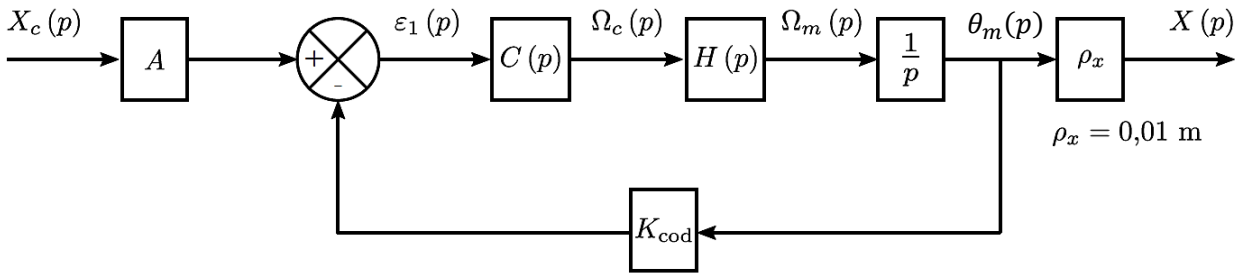


Figure 9 – Schéma bloc de la boucle de position

Le codeur, de type incrémental, placé sur l'arbre moteur, délivre 10 000 points par tour.

Question 22 : A partir du schéma bloc Figure 9, donner la relation entre $\theta_m(p)$ la position angulaire du moteur (en rad) et $X(p)$ la position de l'axe X (en m). Etant donnée la résolution du codeur de 10 000 points par tour, quel et le plus petit angle moteur θ_m mesurable. En déduire le plus petit écart de position Δx mesurable sur l'axe X. Le codeur incrémental permet – il de répondre à l'exigence de précision sur la position donnée Figure 2.

D'après le schéma bloc on a :

$$\boxed{X(p) = \rho_x.\theta_m(p)}$$

Le codeur a une résolution de 10 000 points par tour, le plus petit angle mesurable est donc :

$$\Delta\theta_m = \frac{2.\pi}{10\ 000} = 6{,}28.10^{-4}\ rad$$

$$\Delta\theta_m = \frac{360}{10\ 000} = 3{,}6.10^{-2}\ °$$

On en déduit le plus petit écart de position mesurable :

$$\Delta x = \rho_x.\Delta\theta_m = 0{,}01.6{,}28.10^{-4} = 6{,}28.10^{-6}\ m = 6{,}28\ \mu m$$

Δx est donc largement inférieur à l'exigence de précision de 0,5 mm imposée Figure 2. Le codeur incrémental permet donc parfaitement de répondre à l'exigence de précision…

Question 23 : Déterminer la valeur de K_{cod} en $points.rad^{-1}$.

Le codeur donne 10 000 points par tour, soit 10 000 points pour $2.\pi$ radians :

$$K_{cod} = \frac{10\ 000}{2.\pi} = 1592\ points.rad^{-1}$$

Question 24 : En déduire la valeur de l'adaptateur de consigne A en $points.m^{-1}$ afin que le système soit correctement asservi.

Un système est correctement asservi si pour $X(p) = X_c(p)$, $\varepsilon_1(p) = 0$. Or :

$$\varepsilon_1(p) = A.X_c(p) - K_{cod}.\theta_m(p)$$

$$\varepsilon_1(p) = A.X_c(p) - \frac{K_{cod}}{\rho_x}.X(p)$$

Ainsi pour avoir $\varepsilon_1(p) = 0$ si $X(p) = X_c(p)$, il faut :

$$\boxed{A = \frac{K_{cod}}{\rho_x}} = \frac{1592}{0{,}01} = 1{,}6.10^6\ points.m^{-1}$$

Le correcteur $C(p)$ est un correcteur proportionnel de valeur K_p ($C(p) = K_p$). La fonction de transfert $H(p)$) sera prise égale à :

$$H(p) = \frac{1}{1+\tau.p} \qquad \text{avec } \tau = 20\ ms$$

Pour la suite on prendra également :

$$K_{cod} = 1592\ point.rad^{-1} \qquad A = 1{,}6.10^5\ point.m^{-1}$$

Question 25 : Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)}$. La mettre sous forme canonique.

D'après le schéma bloc, on a :

$$\left(A.X_c(p) - K_{cod}.\theta_m(p)\right).C(p).H(p).\frac{1}{p}.\rho_x = X(p)$$

Avec $X(p) = \rho_x.\theta_m(p)$:

$$\left(A.X_c(p) - \frac{K_{cod}}{\rho_x}.X(p)\right).C(p).H(p).\frac{1}{p}.\rho_x = X(p)$$

$$A.C(p).H(p).\frac{1}{p}.\rho_x.X_c(p) = X(p).\left(1 + \frac{K_{cod}}{\rho_x}.C(p).H(p).\frac{1}{p}.\rho_x\right)$$

$$H_{BF}(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)} = \frac{A.C(p).H(p).\frac{1}{p}.\rho_x}{1 + \frac{K_{cod}}{\rho_x}.C(p).H(p).\frac{1}{p}.\rho_x} = \frac{A.K_p.\frac{1}{1+\tau.p}.\frac{1}{p}.\rho_x}{1 + \frac{K_{cod}}{\rho_x}.K_p.\frac{1}{1+\tau.p}.\frac{1}{p}.\rho_x}$$

Avec $A = \frac{K_{cod}}{\rho_x}$:

$$H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_{cod}.K_p}{p.(1+\tau.p)}}{1 + \frac{K_{cod}.K_p}{p.(1+\tau.p)}} = \frac{K_{cod}.K_p}{K_{cod}.K_p + p + \tau.p^2}$$

$$\boxed{H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{cod}.K_p} + \frac{\tau}{K_{cod}.K_p}.p^2}}$$

On applique au système une consigne en échelon $x_c(t) = x_{c0}.u(t)$ où $u(t)$ est l'échelon unité.

Question 26 : Déterminer l'écart statique ε_s (ou erreur statique ici) de l'asservissement en position de l'axe X. Conclure par rapport au cahier des charges.

Par définition :

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty}\left(x_c(t) - x(t)\right) \qquad \text{pour } x_c(t) = x_{c0}.u(t)$$

D'après le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p.\left(X_c(p) - X(p)\right) \qquad \text{pour } X_c(p) = \frac{x_{c0}}{p}$$

Or :

$$X(p) = H_{BF}(p).X_c(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{cod}.K_p} + \frac{\tau}{K_{cod}.K_p}.p^2}.\frac{x_{c0}}{p}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0} p.\left(\frac{x_{c0}}{p} - \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{cod}.K_p} + \frac{\tau}{K_{cod}.K_p}.p^2}.\frac{x_{c0}}{p}\right) = 0$$

L'asservissement en position de l'axe X est donc précis et respecte le cahier des charges qui impose $\varepsilon_s < 0{,}5\ mm$

On applique à présent une entrée en rampe $x_c(t) = v_0.t.u(t)$ où $u(t)$ est l'échelon unité.

Question 27 : Déterminer l'écart de traînage ε_t (ou erreur de traînage ici) de l'asservissement de position de l'axe X pour cette entrée en rampe.

On reprend la même démarche que pour la question précédente en changeant l'entrée :

$$\varepsilon_t = \lim_{t\to\infty}\left(x_c(t) - x(t)\right) \qquad \text{pour } x_c(t) = v_0.t.u(t)$$

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0} p.\left(X_c(p) - X(p)\right) \qquad \text{pour } X_c(p) = \frac{v_0}{p^2}$$

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0} p.\left(\frac{v_0}{p^2} - \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{cod}.K_p} + \frac{\tau}{K_{cod}.K_p}.p^2}.\frac{v_0}{p^2}\right)$$

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(\frac{v_0}{p} - \frac{1}{1+\frac{p}{K_{cod}.K_p}+\frac{\tau}{K_{cod}.K_p}.p^2}.\frac{v_0}{p}\right)$$

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(\frac{v_0.\left(1+\frac{p}{K_{cod}.K_p}+\frac{\tau}{K_{cod}.K_p}.p^2\right)}{p.\left(1+\frac{p}{K_{cod}.K_p}+\frac{\tau}{K_{cod}.K_p}.p^2\right)} - \frac{v_0}{p.\left(1+\frac{p}{K_{cod}.K_p}+\frac{\tau}{K_{cod}.K_p}.p^2\right)}\right)$$

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(\frac{v_0.p.\left(\frac{1}{K_{cod}.K_p}+\frac{\tau}{K_{cod}.K_p}.p\right)}{p.\left(1+\frac{p}{K_{cod}.K_p}+\frac{\tau}{K_{cod}.K_p}.p^2\right)}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{v_0.\left(\frac{1}{K_{cod}.K_p}+\frac{\tau}{K_{cod}.K_p}.p\right)}{1+\frac{p}{K_{cod}.K_p}+\frac{\tau}{K_{cod}.K_p}.p^2}\right)$$

$$\boxed{\varepsilon_t = \frac{v_0}{K_{cod}.K_p}}$$

Question 28 : Existe – t – il une valeur de K_p permettant de satisfaire l'exigence de précision pour une entrée en rampe donnée Figure 2. Si oui laquelle ?

L'exigence Figure 2 impose un écart de traînage $\varepsilon_t \leq 50\ mm$ pour une consigne à la vitesse maximale, soit $v_0 = v_{max} = 2{,}5\ m.s^{-1}$. On veut donc :

$$\varepsilon_t = \frac{v_{max}}{K_{cod}.K_p} \leq 0{,}05\ m$$

Soit :

$$\boxed{K_p \geq \frac{v_{max}}{K_{cod}.0{,}05}}$$

Application numérique :

$$K_p \geq \frac{2{,}5}{1592.0{,}05} = 3{,}1.10^{-2}\ s^{-1}$$

Une étude de stabilité préliminaire (Critère de marge de phase Figure 2) a permis de montrer que le gain K_p du correcteur, doit également vérifier la condition suivante :

$$K_p \leq 4{,}2.10^{-2}\ s^{-1}$$

Afin d'optimiser le réglage du gain K_p, une simulation de la réponse à un échelon et de la réponse à une rampe de l'asservissement en position de l'axe X a été réalisée pour trois valeurs du gain K_p : $K_p = 3{,}1.10^{-2}\ s^{-1}$, $K_p = 3{,}7.10^{-2}\ s^{-1}$et $K_p = 4{,}2.10^{-2}\ s^{-1}$. Les courbes de ces simulations sont données Figure 10 et Figure 11.

NOTE — La simulation réalisée ne tient pas compte du limiteur de courant. Dans la réalité, ce dernier va saturer, ce qui aura pour conséquence d'allonger fortement le temps de réponse réel. Ainsi la valeur du temps de réponse qu'on peut mesurer sur la réponse à un échelon Figure 10 n'est pas représentative du temps de réponse réel. En revanche l'évolution du temps de réponse en fonction de la valeur de K_p est représentative de la réalité.

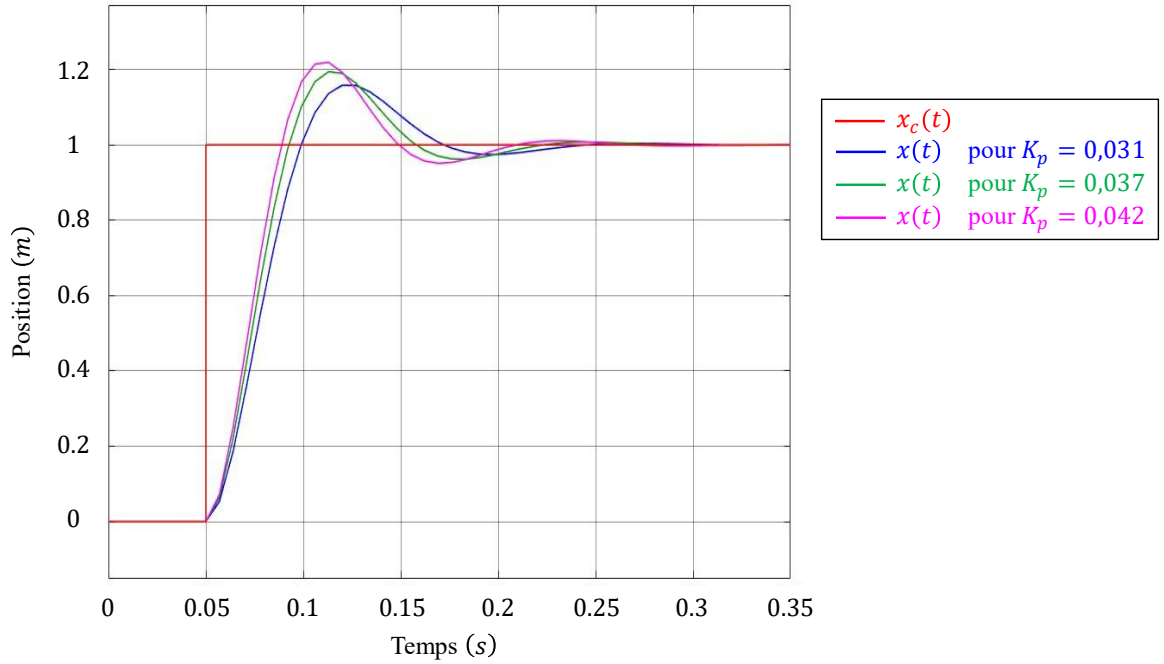


Figure 10 – Réponses à un échelon

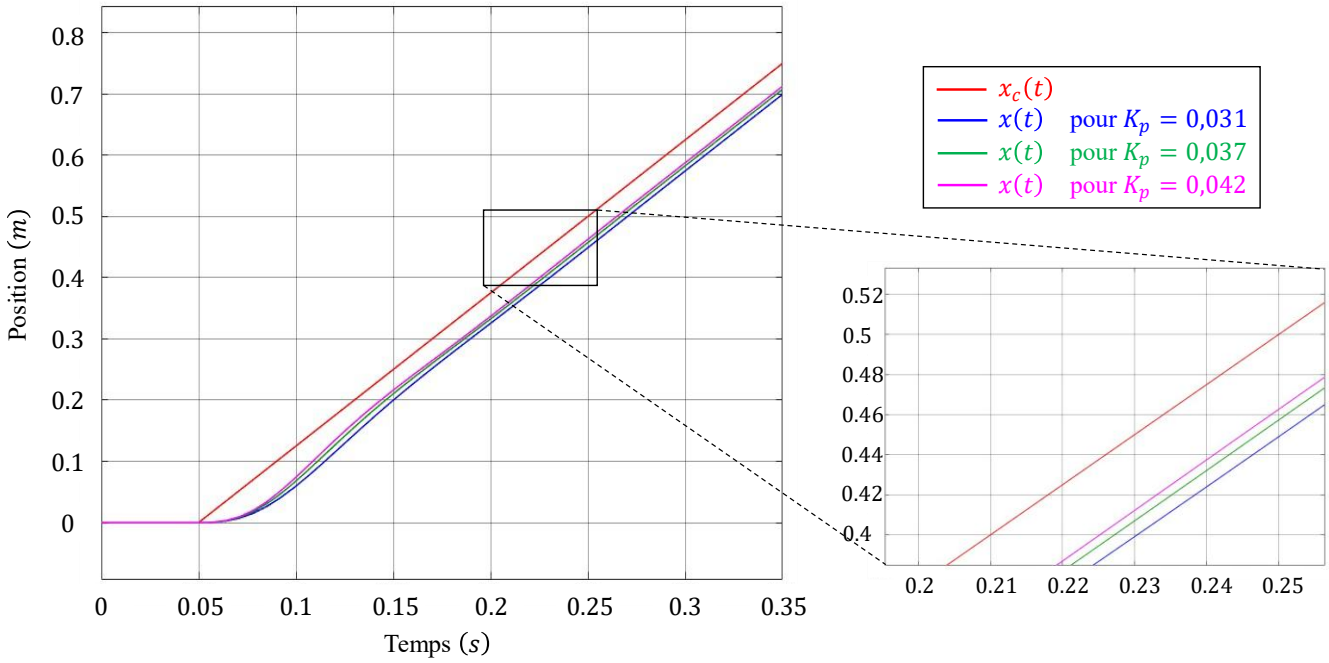
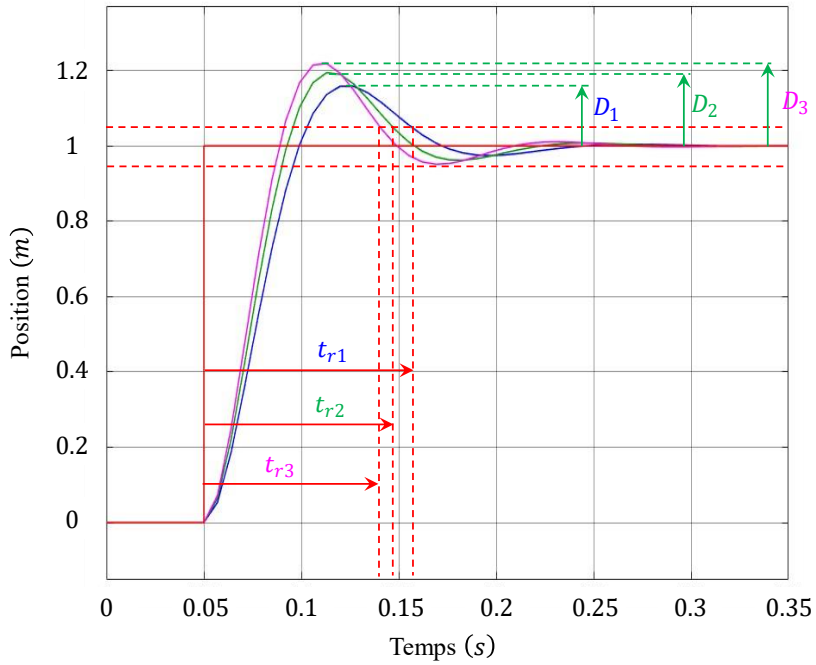
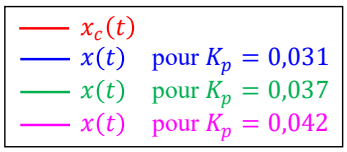


Figure 11 – Réponse à une rampe

Question 29 : Sur le document réponse, faire apparaitre le temps de réponse à 5% ainsi que le dépassement (s'il existe) sur la réponse à un échelon et l'écart de trainage sur la réponse à une rampe.



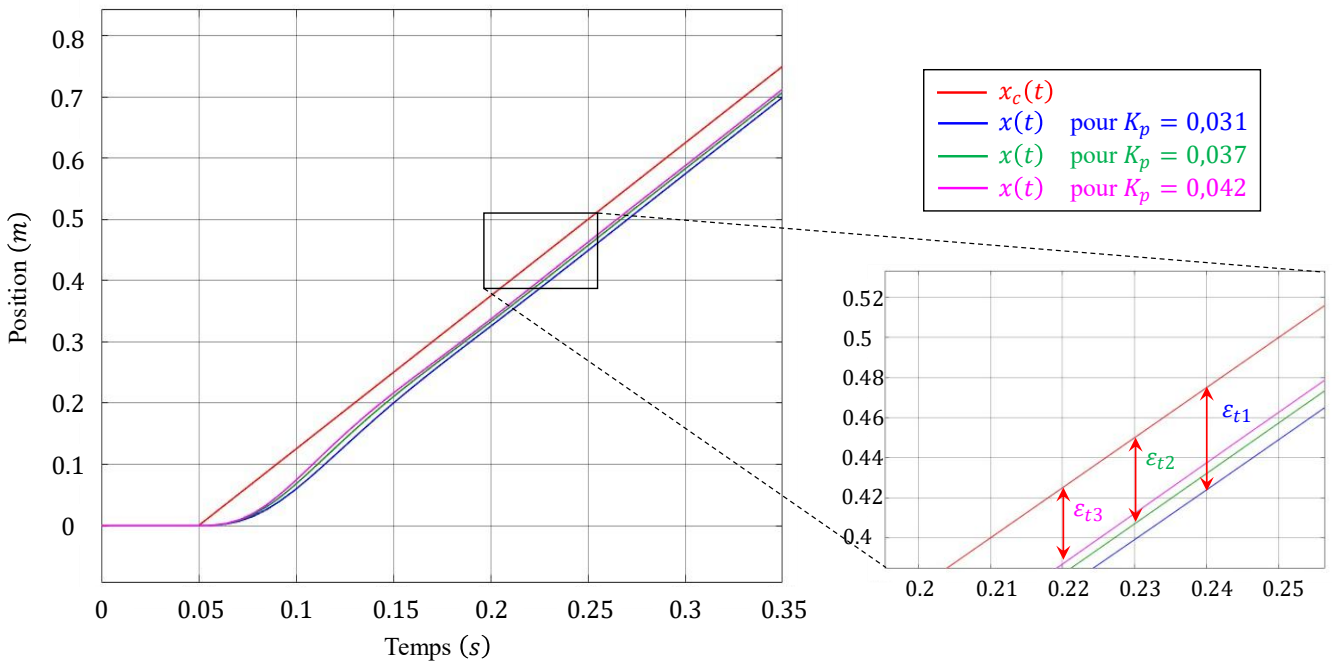


Sur le graphique de la réponse à un échelon on mesure :

- Pour $K_p = 3{,}1.10^{-2}\ s^{-1}$:
  $tr_1 = 0{,}107\ s$
  $D_1 = 16\ \%$
- Pour $K_p = 3{,}7.10^{-2}\ s^{-1}$:
  $tr_2 = 0{,}95\ s$
  $D_2 = 20\ \%$
- Pour $K_p = 4{,}2.10^{-2}\ s^{-1}$:
  $tr_3 = 0{,}87\ s$
  $D_1 = 21\ \%$

Sur le graphique de la réponse à une rampe, on mesure :

- Pour $K_p = 3{,}1.10^{-2}\ s^{-1}$:
  $\varepsilon_{t1} = 0{,}05\ m = 50\ mm$
- Pour $K_p = 3{,}7.10^{-2}\ s^{-1}$:
  $\varepsilon_{t2} = 0{,}042\ m = 42\ mm$
- Pour $K_p = 4{,}2.10^{-2}\ s^{-1}$:
  $\varepsilon_{t1} = 0{,}038\ m = 38\ mm$



Question 30 : Conclure sur le choix optimal de la valeur du gain K_p et sur le respect des exigences données Figure 2.

Le réglage de K_p qui donne le meilleur temps de réponse et l'erreur de traînage la plus faible tout en respectant le critère de dépassement est :

$$\boxed{K_p = 3{,}7.10^{-2}\ s^{-1}}$$

Dans ce cas le cahier des charges est respecté :

- $\varepsilon_s = 0 \leq 0{,}5\ mm$,
- $\varepsilon_t = 42\ mm \leq 50\ mm$,
- $D_{\%} = 20\ \% \ \leq 20\ \%$

Partie D : DESSIN