

Précision et incertitudes

Capacités exigibles :

- Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.
- Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A).
- Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).
- Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
- Evaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.
- Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée.
- Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
- Ecrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
- Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.
- Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.
- Utiliser un logiciel de régression linéaire afin d'obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Analyser les résultats obtenus à l'aide d'une procédure de validation : analyse graphique intégrant les barres d'incertitude ou analyse des écarts normalisés.
- Capacité numérique : simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire de variation des valeurs expérimentales de l'une des grandeurs – simulation Monte-Carlo – pour évaluer l'incertitude sur les paramètres du modèle.

On souhaite mesurer la période d'oscillation d'un pendule simple à l'aide d'un chronomètre. On réalise 18 mesures indépendantes :

1,22 s	1,18 s	1,15 s	1,32 s	1,10 s	1,35 s	1,20 s	1,11 s	1,34 s
1,38 s	1,09 s	1,22 s	1,30 s	1,23 s	1,08 s	1,22 s	1,36 s	1,05 s

Des questions se posent au vu des résultats :

- Pourquoi une telle variabilité des résultats ?
- Quelle est la mesure de la période du pendule ?
- Comment écrire le **résultat final** de la mesure ?

Avant de répondre à ces questions, il faut définir les notions de précision et d'incertitude d'une mesure.

I. Précision d'une mesure

1. Notation scientifique

Un nombre écrit en notation scientifique est de la forme :

$$a \times 10^n \text{ avec } 1 \leq a < 10$$

Vu que $10^0 = 1$, on omet souvent de l'écrire lorsqu'il doit être utilisé.

Lien avec la notion de précision

Lorsque l'on exprime la valeur d'une grandeur physique, le nombre de chiffres avec lequel on écrit le résultat reflète « à combien près » on connaît cette valeur.

2. Chiffres significatifs

- Un chiffre est dit significatif lorsque sa valeur peut être mesurée ou connue avec précision.

- Le nombre de chiffres significatifs d'une valeur est le nombre de chiffres qui apparaissent dans l'écriture de a en notation scientifique.
- Le zéro peut être un chiffre significatif !

Exemples :

$0,24 = \dots 2,4 \dots 10^{-1}$: il y a $\dots 2 \dots$ chiffres significatifs
 $0,240 = \dots 2,40 \dots 10^{-1}$: il y a $\dots 3 \dots$ chiffres significatifs

Cas de l'addition et de la soustraction

Quand on additionne ou soustrait deux grandeurs, le résultat final est aussi précis que la donnée la moins précise - On fait le calcul avec tous les chiffres, puis on arrondit.

Exemples :

Calcul	Écriture du résultat	Explication
$3,23 \text{ V} + 10 \text{ V} = 13,23 \text{ V}$	13 V	La 2 ^{ème} donnée s'écrit au V près
$15,8 \text{ g} - 6,745 \text{ g} = 9,055 \text{ g}$	$9,1 \text{ g}$	La 1 ^{ère} donnée s'écrit à 0,1 g près
$1,56 \times 10^4 \text{ m} + 2,3 \times 10^5 \text{ m} = 2,45 \times 10^5 \text{ m}$	$2,5 \cdot 10^5 \text{ m}$	La 2 ^{ème} donnée est précise à $0,1 \cdot 10^5 \text{ m}$.

Cas de la multiplication et de la division

Quand on multiplie ou divise deux grandeurs entre elles, le résultat a autant de chiffres significatifs que la donnée qui en a le moins.

Exemples :

- La masse m d'un objet en or de masse volumique $\rho = 19,3 \text{ g.cm}^{-3}$ et de volume $V = 1570 \text{ cm}^3$ vaut :

$$m = \rho \times V = 19,3 \times 1570 = 30301 \text{ g} = 30,301 \text{ kg}$$

Le résultat ne doit comporter que 3 chiffres significatifs, donc il s'écrit $m = 30,3 \text{ kg}$

- Un coureur parcourt $d = 100 \text{ m}$ en $\Delta t = 15 \text{ s}$. Sa vitesse moyenne vaut : $v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{100}{15} = 6,7 \text{ m.s}^{-1}$

Enchaînement de plusieurs calculs

Si un résultat doit être réutilisé dans un calcul ultérieur, il faut utiliser un à deux chiffres de plus que le nombre de chiffres significatifs utilisés pour écrire le résultat. Cela permet d'éviter de propager successivement des arrondis au cours du calcul et que le résultat devienne trop différent de celui attendu.

Dans la mesure du possible : limiter les calculs intermédiaires.

II. Incertitude d'une mesure

1. Notion d'incertitude

- **Mesurage** : ensemble d'opérations (actions, calculs) qui vise à déterminer la valeur d'une grandeur physique (à distinguer de la **mesure** qui est le résultat d'une opération de mesurage). En métrologie, on appelle souvent **m la mesure** de la valeur de la grandeur (un nombre), et **M le résultat de la mesure**, c'est à dire l'expression complète du résultat (un intervalle de valeurs).
- **Valeur vraie** : mesure que l'on obtiendrait par un mesurage parfait. On ne la connaît pas et on parle également de « valeur théorique ».
- **Grandeur d'influence** : grandeur qui n'est pas la grandeur particulière recherchée mais qui a un effet sur le résultat de la mesure (température, sensibilité du chronomètre, fatigue de l'utilisateur ...)
- **Erreur de mesure** : un mesurage n'étant jamais parfait, il y a toujours une erreur de mesure. L'erreur de mesure est la différence entre la valeur mesurée d'une grandeur et la valeur vraie. Cette erreur de mesure peut être de deux types : **aléatoire** ou **systématique**.

➤ Erreurs aléatoires

L'erreur aléatoire provient des variations non prévisibles de grandeurs d'influence. Ces variations conduisent à une **dispersion des résultats**, même si toutes les précautions ont été prises pour que le mesurage soit effectué dans des conditions aussi constantes que possible. On peut citer quelques causes d'erreurs aléatoires :

- lecture ou appréciation de la dernière division sur une règle, choix du dernier digit sur un appareil numérique.
- limite de la précision de l'appareil de mesure
- parasites extérieurs ...

Application 1 Erreur aléatoire

Dans l'exemple d'introduction, donner un exemple d'erreur aléatoire.

Ces erreurs aléatoires se font tantôt à l'excès, tantôt en défaut, leur moyenne est nulle.

➤ Erreurs systématiques

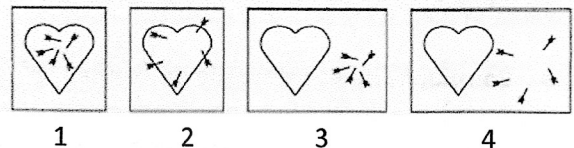
Elles ont des origines diverses :

- appareil défectueux ou mauvaise utilisation (zéro mal réglé)
- erreur d'observation : parallaxe
- variation de température ...

Important : Avant toute opération de mesure en travaux pratiques, il est impératif de s'efforcer d'éliminer toutes les erreurs systématiques !

➤ Représentation illustrée des deux types d'erreurs

On représente classiquement les rôles respectifs des erreurs aléatoires et systématiques par une analogie avec une tir sur cible (figure ci-contre), le centre de la cible représentant la valeur vraie de la grandeur à mesurer :



Associer les caractéristiques suivantes à chacune des situations :

- Faibles erreurs aléatoires et forte erreur systématique : **3**
- Fortes erreurs aléatoires et forte erreur systématique : **4**
- Faibles erreurs aléatoires et faible erreur systématique : **1**
- Fortes erreurs aléatoires et faible erreur systématique : **2**

Dans la suite, on supposera que l'on a identifié les origines des erreurs systématiques et qu'on a pu les corriger. **Les mesures réalisées ne seront plus entachées que par les erreurs aléatoires.**

- **Incertitude :** Elle permet d'estimer l'importance de l'erreur aléatoire connue et caractérise la dispersion des valeurs qu'on pense raisonnablement pouvoir attribuer à la grandeur mesurée. Plus elle est petite, meilleur est le processus de mesure.

➤ Présentation d'un résultat doté d'une incertitude

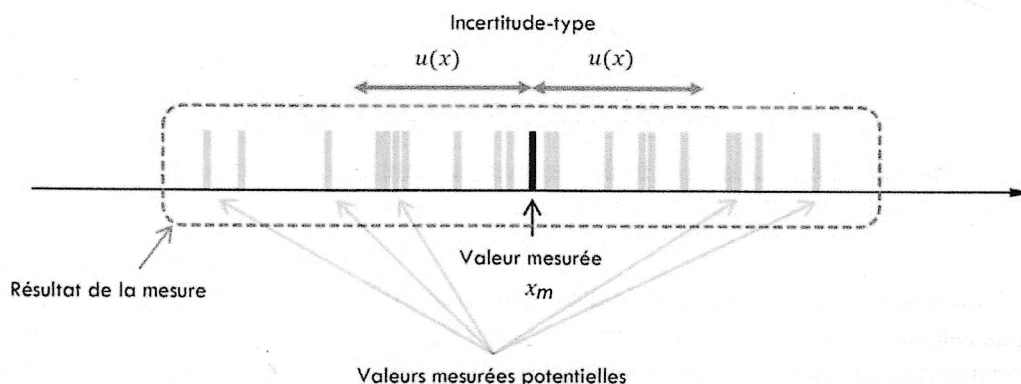
Notation de la mesure d'une grandeur physique x quelconque :

$$x = x_m \pm u(x)$$

où (voir la suite pour plus de détails) : x_m = meilleure estimation de la valeur vraie X de la grandeur physique x

$u(x)$ = incertitude type sur la mesure

Remarque : il ne faudrait pas considérer que toutes les mesures se trouvent dans l'intervalle $[x_m - u(x), x_m + u(x)]$ mais on estime qu'on a une probabilité élevée de trouver une mesure dans cet intervalle.



Résultat incorrect	Comment corriger ?	Résultat correct
$R = (156,2 \pm 0,629) \Omega$	Garder un seul chiffre à l'incertitude en le majorant	$R = (156,2 \pm 0,7) \Omega$
$T = (0,75386 \pm 0,04) s$	Arrondir la période au $10^{-2} s$	$T = (0,75 \pm 0,04) s$
$v = (9,821 \pm 0,526) m.s^{-1}$	Garder un seul chiffre à l'incertitude et arrondir la vitesse au 10^{-1}	$v = (9,8 \pm 0,6) m.s^{-1}$

➤ Incertitude relative (ou précision)

Pour une mesure de x donnant la valeur $x_m \pm u(x)$, l'incertitude relative est donnée par : $\epsilon = \frac{u(x)}{x_m}$

• Nécessité de comparaison entre valeur mesurée et valeur acceptée

- Une mesure en soi n'a aucun intérêt à moins de procéder à une comparaison avec une valeur acceptée.
- La valeur acceptée est déjà connue et publiée. Elle peut provenir de la théorie ou de mesures en accord avec une loi physique.

Remarque : Une valeur acceptée est elle-même dotée d'une incertitude en général, mais elle est bien plus faible que ce l'on pourrait obtenir par l'expérience que l'on réalise a priori.

• Compatibilité et intervalle de confiance

L'intervalle ci-dessus est appelé **intervalle de confiance** et il est systématiquement associé à une probabilité : 95 % des mesures vont se trouver à une distance $u(x)$ de part et d'autre de la valeur vraie.

2. Les types d'incertitude

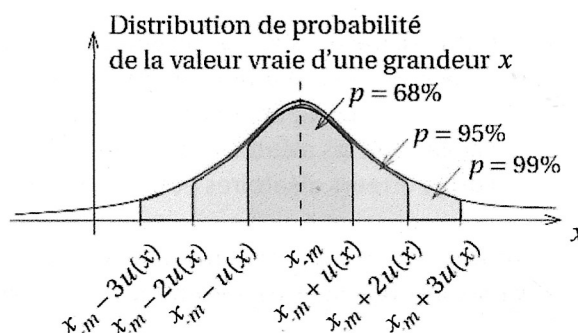
• Incertitude de type A (ou incertitude de répétabilité) :

Incertaince qui provient de la dispersion statistique des résultats lorsque l'on répète N fois une mesure.

➤ Évaluation d'une incertitude de type A

On réalise N mesures de la grandeur x .

Les résultats ont différentes valeurs $(x_1, x_2, \dots, x_N)$.



Grandeur calculée	Signification	Valeur
moyenne	meilleure estimation de x	$x_m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$
écart-type standard	dispersion statistique des valeurs autour de la moyenne	$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - x_m)^2}$
incertitude au seuil de 68 % (incertitude-type)	la véritable valeur x a 68% de chance de se trouver entre $x_m - u(x)$ et $x_m + u(x)$	$u(x) = \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}$
incertitude au seuil de 95 % (incertitude élargie)	la véritable valeur x a 95% de chance de se trouver entre $x_m - U(x)$ et $x_m + U(x)$	$U(x) = 2u(x)$

Remarque : pour un nombre N de mesures inférieur à une soixantaine, l'incertitude élargie est liée au coefficient Student k par la relation $U(x) = k \times u(x)$ où k dépend de N ($k(N)$ donné par l'énoncé sous forme d'un tableau)

Application 2 Incertitude-type sur la période d'oscillation d'un pendule

- A l'aide de la calculatrice en mode Stat, donner la valeur moyenne et l'écart-type de la période d'oscillation.
- En déduire l'incertitude-type puis donner le résultat de la mesure associé à un niveau de confiance de 95 %.

• Incertitude de type B :

Lorsque l'on ne dispose que d'une unique mesure, on peut évaluer l'incertitude de différentes manières.

Cela peut dépendre notamment :

- des propriétés de l'appareil de mesure (classe, calibre, résolution) ;
- des spécifications d'un fabricant sur le matériel (précision de la verrerie en chimie) ;
- de la méthode employée pour exécuter la mesure.

➤ Evaluation de type B de l'incertitude-type

En pratique, à défaut d'autres indications, considérant l'intervalle de demi-largeur Δ dans lequel peut se trouver la mesure ($x \in [x_m - \Delta ; x_m + \Delta]$), on imagine que la loi de distribution est rectangulaire ce qui revient à considérer une équiprobabilité des valeurs possibles sur cet intervalle et on peut alors montrer mathématiquement que :

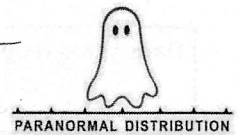
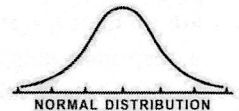
$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Démonstration :

$$u^2(x) = \int_{x_m - \Delta}^{x_m + \Delta} (x - x_m)^2 p(x) dx$$

avec $p(x) = \text{loi de probabilité} = \text{constante}$ $p(x)$

$$\int_{x_m - \Delta}^{x_m + \Delta} p(x) dx = 1 \quad \text{d'où} \quad p(x) \times 2\Delta = 1 \quad \Rightarrow \quad p(x) = \frac{1}{2\Delta}$$



$$u^2(x) = \frac{1}{2\Delta} \int_{x_m - \Delta}^{x_m + \Delta} (x - x_m)^2 dx = \frac{1}{2\Delta} \left[\frac{(x - x_m)^3}{3} \right]_{x_m - \Delta}^{x_m + \Delta} = \frac{1}{2\Delta} \left[\frac{\Delta^3}{3} - \left(-\frac{\Delta^3}{3} \right) \right] = \frac{\Delta^2}{3} \Rightarrow u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Les constructeurs fournissent généralement, dans les notices des appareils, des informations sur leur précision.

Différents cas peuvent se présenter :

- le constructeur fournit une indication de type $\pm \Delta$ (tolérance) sans autre information. Dans ce cas, on prendra pour incertitude-type :

$$u = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

- pour un appareil de mesure analogique (appareil à cadran, lecture d'un régleur ...), l'incertitude de la lecture est estimée à partir de la valeur d'une graduation. L'incertitude-type vaut alors :

$$u = \frac{1/2 \text{ graduation}}{\sqrt{3}}$$

- pour un appareil à affichage numérique sans indication du fabricant, on considère que l'intervalle est donné par la valeur du dernier digit affiché d :

$$u = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Application 3 Incertitude-type sur une température

Un thermomètre digital indique $\theta = 37,5^\circ\text{C}$; déterminer son incertitude-type u .

Application 4 Incertitude-type sur une résistance

On mesure une résistance à l'aide d'un ohmmètre, la valeur affichée est $10,0 \Omega$. Le constructeur précise que l'erreur sur la mesure est $\pm 5 \%$. Donner le résultat de la mesure associé à un niveau de confiance de 95 %.

Application 5 Incertitude-type sur une distance

Sur un banc d'optique gradué au millimètre près, un étudiant estime la distance lentille-écran L donnant une image nette. Il trouve les valeurs suivantes : $L_{\min} = 685 \text{ mm}$ et $L_{\max} = 693 \text{ mm}$

- Donner la meilleure estimation de L ainsi que la tolérance.
- En déduire l'incertitude-type.
- Donner le résultat de la mesure associé à un niveau de confiance de 95 %

3. Incertitude-type composée

C'est l'incertitude-type d'un mesurage lorsque le résultat y est obtenu à partir des valeurs mesurées x_k d'autres grandeurs : $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

- **Incertitude-type composée de type somme (ou différence) :**

Soit la fonction $y = \alpha x_1 + \beta x_2$

Exemple : on veut connaître le périmètre d'un rectangle à partir de la mesure de ses deux côtés.

Si les erreurs sur x_1 et x_2 sont indépendantes, l'incertitude-type sur y s'écrit :

$$u(y) = \sqrt{(\alpha u(x_1))^2 + (\beta u(x_2))^2}$$

- **Incertitude-type composée de type produit (ou quotient) :**

Soit la fonction $y = k x_1^\alpha x_2^\beta$

Exemple : on veut connaître l'aire d'un rectangle à partir de la mesure de ses deux côtés.

Si les erreurs sur x_1 et x_2 sont indépendantes, l'incertitude-type relative sur y s'écrit :

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

Application 6 Incertitude-type sur l'écart entre deux positions

Sur un banc d'optique, on mesure deux positions : $x_1 = 195,7$ cm et $x_2 = 14,5$ cm.

a. Exprimer puis calculer l'incertitude-type composée sur y , l'écart entre ces positions.

b. Donner le résultat de la mesure de y associé à un niveau de confiance de 95 %.

Dans le cas d'un appareil à graduation, l'incertitude de lecture pour la mesure d'un écart s'exprime par :

$$u = \frac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{6}}$$

Application 7 Incertitude-type sur la puissance électrique

On détermine la puissance électrique par la formule $P = RI^2$. On mesure $R = 15,7 \pm 1,0$ et $I = 0,274 \pm 0,002$ A, avec un niveau de confiance de 68%.

1. Calculer l'incertitude-type relative sur P .

2. Déduire la mesure de P associée à un niveau de confiance de 68%.

3. Comparer les incertitudes-type relatives que l'on a sur I et sur R et conclure.

- **Incertitude-type composée quelconque**

Dans les cas différents des précédents, on recourra à une méthode de Monte-Carlo, méthode visant à calculer une valeur numérique, et utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes.

Pour déterminer l'incertitude-type $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on calcule N valeurs de y à partir de N valeurs aléatoires des différentes grandeurs x_i , ces valeurs aléatoires étant prises dans un intervalle lié à l'incertitude-type $u(x_i)$ suivant une loi de distribution que l'on choisira uniforme, sauf précision contraire. On peut ensuite calculer l'écart-type sur les N valeurs de y qui sera l'incertitude-type sur y (voir exemples en TP).

4. Comparaison de deux mesures : le Z-score ou écart normalisé

Pour comparer 2 mesures x_1 et x_2 selon deux protocoles, d'incertitudes-types respectives $u(x_1)$ et $u(x_2)$, on calcule le Z-score défini par :

$$Z = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2}}$$

Si on compare une valeur mesurée x_{exp} avec une valeur de référence x_{ref} dont l'incertitude est négligeable devant celle de la mesure effectuée, alors :

$$Z = \frac{|x_{\text{exp}} - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$$

• $Z < 2 \Rightarrow$ le résultat de la mesure est acceptable.

• $2 < Z < 3 \Rightarrow$ la mesure nécessite une attention particulière, surtout si cette situation se reproduit souvent.

• $3 < Z \Rightarrow$ la mesure doit être rejetée et on recherche alors les causes possibles de cette anomalie.

Remarque : Dans le cas des incertitudes de type A, on s'attend à ce que l'écart entre les deux valeurs ne dépasse pas $2u = U$ (dans ce cas, probabilité que la mesure soit bonne : 95 chances sur 100). On peut donc écrire :

$$x_{\text{ref}} - 2u(x) < x_{\text{exp}} < x_{\text{ref}} + 2u(x) \text{ à } 95\% \Rightarrow -2u(x) < x_{\text{exp}} - x_{\text{ref}} < 2u(x) \\ \Rightarrow -2 < Z < 2$$

Application 8 Vitesse du son

On mesure la vitesse du son dans l'air à 20°C. On effectue une série de mesures qui conduit à $v_{\text{mes}} = 335 \text{ m.s}^{-1}$ et à une incertitude-type $u = 5 \text{ m.s}^{-1}$. La valeur tabulée indique à cette température indique à cette température $v = 343 \text{ m.s}^{-1}$. Que pensez-vous de la valeur mesurée ?