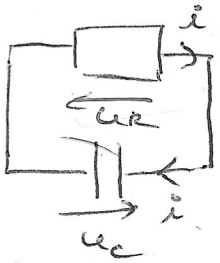
Correction Applications Circuits d'ordre 1

Application 1



Loi des mailles $\Rightarrow u_R + u_c = 0$

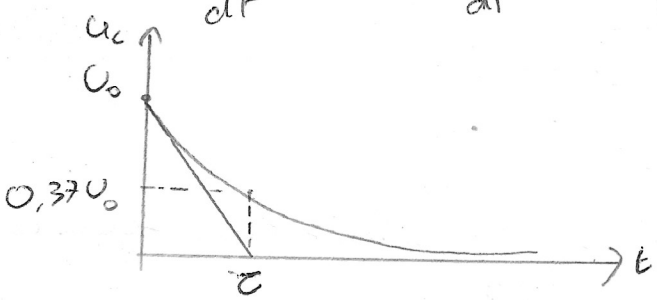
$Ri + u_c = 0$ d'où $RC\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$

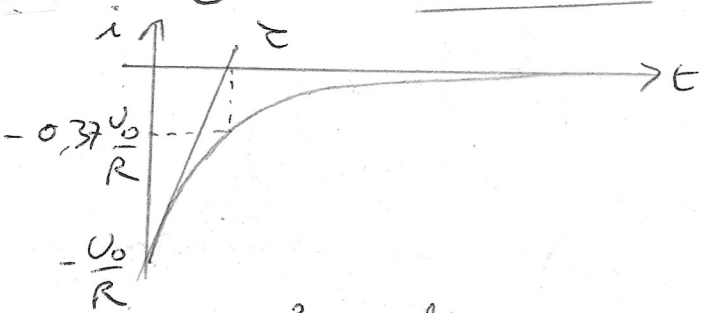
$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

$\Rightarrow u_c(t) = Ke^{-t/\tau}$. On $u_c(0^+) = u_c(0^-) = U_0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur.

On en déduit $K = U_0$ soit $\boxed{u_c(t) = U_0 e^{-t/\tau}}$

$$i(t) = C\frac{du_c}{dt} = CU_0\frac{d}{dt}\left(e^{-t/\tau}\right) = -\frac{CU_0}{\tau}e^{-t/\tau} = -\frac{U_0}{R}e^{-t/\tau}$$





Bilan de puissance : $Ri^2 + u_c i = 0 \Leftrightarrow Ri^2 + C\frac{du_c}{dt} = 0$

$$\Leftrightarrow Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(u_c^2)\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{dW_{elec}}{dt} = -Ri^2 < 0$$

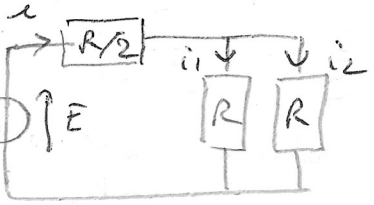
L'énergie électrique stockée dans le condensateur diminue à cause des pertes thermiques par effet Joule dans la résistance

Application 2

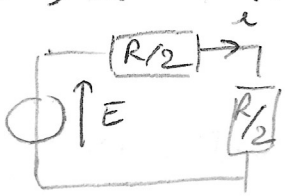
1- La tension u aux bornes du condensateur est continue :

$\Rightarrow u(0^+) = u(0^-) = 0$

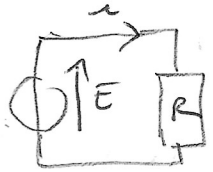
* A $t = 0^+$, le montage est équivalent à :



$\Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow$

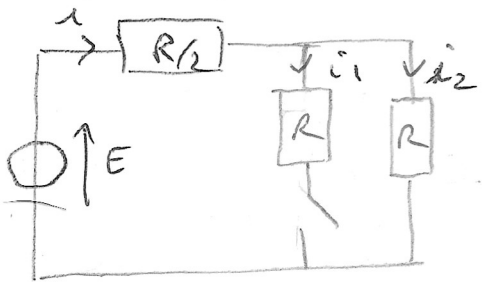


d'où $i(0^+) = \frac{E}{R}$

$i_1(0^+) = i_2(0^+)$ par symétrie et $i_1(0^+) + i_2(0^+) = i(0^+)$

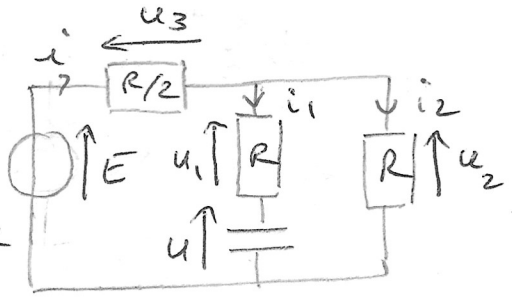
On en déduit $\boxed{i_1(0^+) = i_2(0^+) = \frac{E}{2R}}$

* Quand $t \to \infty$, le condensateur est chargé et est équivalent à un interrupteur ouvert. Le montage est donc équivalent à :



d'où $\boxed{i_1 = 0}$

et $i = i_2 = \dfrac{E}{R + R/2} = \boxed{\dfrac{2E}{3R}}$



2- La loi des noeuds s'écrit :

$$i = i_1 + i_2$$

$$u_3 = \frac{R}{2} i \; ; \; u_1 = R i_1 \; ; \; i_1 = C \frac{du}{dt} \; ; \; u_2 = R i_2$$

On applique deux fois la loi des mailles :

$$E = u_3 + u_1 + u \quad \text{et} \quad u_1 + u = u_2$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$u_3 = E - u_1 - u \qquad i_2 = \frac{u_1 + u}{R}$$

$$i = \frac{2}{R}(E - R i_1 - u) \qquad i_2 = i_1 + \frac{u}{R}$$

On porte ces expressions dans la loi des noeuds :

$$\frac{2}{R}E - 2i_1 - \frac{2u}{R} = i_1 + i_2 + \frac{u}{R}$$

$$4i_1 + \frac{3u}{R} = \frac{2E}{R} \Leftrightarrow 4C\frac{du}{dt} + \frac{3u}{R} = \frac{2E}{R}$$

On met sous forme canonique en normalisant l'équa. diff. :

$$\frac{du}{dt} + \left(\frac{3}{4RC}\right)u = \frac{E}{2RC} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\tau = \frac{4RC}{3}}$$

$\left(\frac{1}{\tau}\right)$

Par identification avec la forme donnée :

$$\frac{E'}{\tau} = \frac{E}{2RC} \Leftrightarrow E' = E \times \frac{\tau}{2RC} = E \times \frac{4RC}{2 \times 3RC} \quad \boxed{E' = \frac{2E}{3}}$$

3- La solution générale de cette équation différentielle est :

$$u(t) = K e^{-t/\tau} + E'$$

On $u(0) = 0$ d'où $K + E' = 0$ soit $K = -E'$

$$\text{d'où} \quad \boxed{u(t) = E'(1 - e^{-t/\tau})}$$

4- $i_1(t) = C\frac{du}{dt} = +\frac{CE'}{\tau} e^{-t/\tau} = \not{C}\frac{2E}{\not{3}} \times \frac{\not{3}}{4R\not{C}} \Rightarrow \boxed{i_1(t) = \frac{E}{2R} e^{-t/\tau}}$

$\Rightarrow i_1(0) = \frac{E}{2R}$ et $i(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

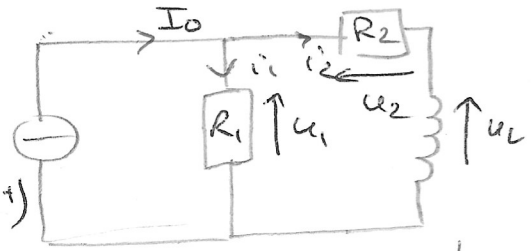
On retrouve bien les résultats de la question 1-

Application 3

1-* Avant qu'on ferme l'interrupteur, le régime permanent est établi et $i_2 = I_0$.

Par continuité du courant dans la bobine $i_2(0^+) = i_2(0^-) = I_0$

d'où $i_1(0^+) = I_0 - i_2(0^+) = \underline{0}$

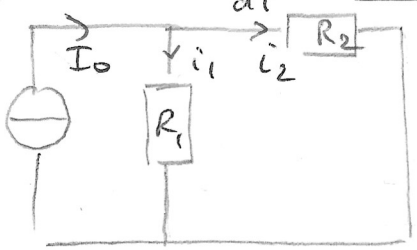


Par la loi des mailles :

$u_1 = u_2 + u_L \Rightarrow u_L(0^+) = u_1(0^+) - u_2(0^+)$

$u_L(0^+) = R_1 i_1(0^+) - R_2 i_2(0^+) = 0 - R_2 I_0 = \underline{-R_2 I_0}$

* Quand $t \to \infty$, la bobine est équivalente à un fil car $u_L = L\frac{di_2}{dt} = \underline{0}$. Le montage est donc équivalent à :



Grâce à la formule du diviseur de courant : $i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0$

2- $I_0 = i_1 + i_2$ avec

$u_1 = R_1 i_1$; $u_2 = R_2 i_2$; $u_L = L\frac{di_2}{dt}$

La loi des mailles s'écrit :

$u_1 = u_2 + u_L$ d'où $i_1 = \frac{1}{R_1}(u_2 + u_L)$ soit

$$I_0 = \frac{1}{R_1}(u_2 + u_L) + i_2 = \frac{1}{R_1}\left(R_2 i_2 + L\frac{di_2}{dt}\right) + i_2$$

$$I_0 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{L}{R_1}\frac{di_2}{dt} \Leftrightarrow \frac{di_2}{dt} + \frac{(R_1+R_2)}{L} i_2 = \frac{R_1 I_0}{L}$$

$\times \frac{1}{\tau}$

3- La solution de cette équation différentielle est :

$$i_2(t) = K e^{-t/\tau} + \frac{R_1 I_0}{K} \times \frac{K}{R_1 + R_2} \quad \text{avec} \quad \underline{\tau = \frac{L}{R_1 + R_2}}$$

On $i_2(0^+) = I_0$ d'où $K + \frac{R_1}{R_1+R_2} I_0 = I_0$

soit $K = I_0\left(1 - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right) = I_0\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$

d'où $$i_2(t) = \frac{I_0}{R_1+R_2}\left(R_2 e^{-t/\tau} + R_1\right)$$

$i_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{R_1 I_0}{R_1+R_2}$: on retrouve bien le résultat de la question 1 -