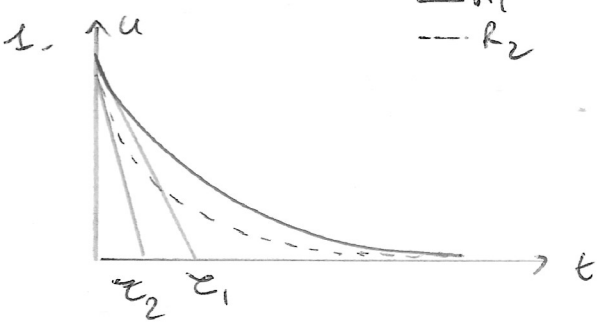
Correction TD Circuits d'ordre 1

Exercice 1

1. 

— R_1
--- R_2

$\tau_2 < \tau_1$ d'où $R_2 C < R_1 C$

La résistance la plus élevée est R_1.

2- $\tau_2 = 0{,}10$ s d'où $R_2 = \frac{\tau_2}{C} = \frac{0{,}1}{22.10^{-6}}$ $\quad R_2 = 4{,}5\ k\Omega$

$\tau_2 = 0{,}20$ s d'où $R_1 = 2R_1$ $\quad R_1 = 9{,}0\ k\Omega$

3- Lors de la décharge, l'énergie du condensateur est dissipée sous forme thermique (effet Joule) dans la résistance.

4- L'énergie stockée dans le condensateur à $t=0$ est $W_{élec} = \frac{1}{2} C U_0^2$. C'est cette énergie qui est dissipée au travers de chaque résistance lors de la décharge.

$$W_{élec} = \frac{1}{2} \cdot 22.10^{-6} \times (9{,}0)^2 \qquad W_{élec} = 0{,}89\ mJ$$

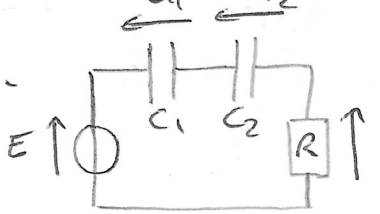
Exercice 2

1- $i = \frac{dq_1}{dt}$ et $i = \frac{dq_2}{dt}$ d'où

$\frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \Rightarrow q_1(t) = q_2(t) + C^{ste}$

On $q_1(0) = q_2(0) = 0$. On en déduit $C^{ste} = 0$.

$q_1(t) = q_2(t)$

2. 

D'après la loi des mailles :

$E = u_1 + u_2 + u = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + Ri$

$$E = q_1\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) + R\frac{dq_1}{dt} = q_1\frac{C_1+C_2}{C_1C_2} + R\frac{dq_1}{dt} \qquad (2)$$

$$\frac{dq_1}{dt} + \underbrace{\frac{1}{R}\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}}_{1/\tau} q_1 = \frac{E}{R}$$

$$\tau = R\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$q_1(t) = Ke^{-t/\tau} + \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}E$$

On $q_1(0) = 0 \Rightarrow K + \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}E = 0 \Rightarrow K = -\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}E$

$$q_1(t) = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

3- Les 2 condensateurs en série sont équivalents à un condensateur de capacité C_{eq}. Dans ce cas-là, la constante de temps du circuit est $\tau = RC_{eq}$. Par identification avec l'expression de τ trouvée précédemment, on en déduit :

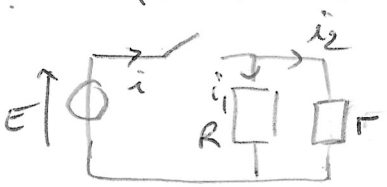
$$C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

A.N. $C_{eq} = \frac{100\times 250}{350} = \frac{100\times 5}{7} \simeq 71\ nF$

Exercice 3

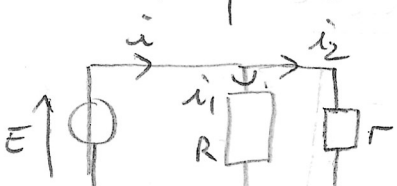
1. Régime permanent : Bobine $\Leftrightarrow$ fil

K ouvert



$i = i_1 = i_2 = 0$

K fermé

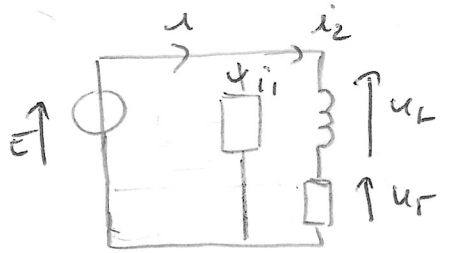


$i_1 = 0$ (résistance court-circuitée)

$$i = \frac{E}{R_{eq}} = E\frac{r+R}{Rr}$$

$$i_2 = \frac{E}{r}$$

2- $t \in [0\ t_0]$



$$E = u_L + u_r = L\frac{di_2}{dt} + r\,i_2 \Rightarrow \frac{di_2}{dt} + \underbrace{\frac{r}{L}}_{\frac{1}{\tau}} i_2 = \frac{E}{L}$$

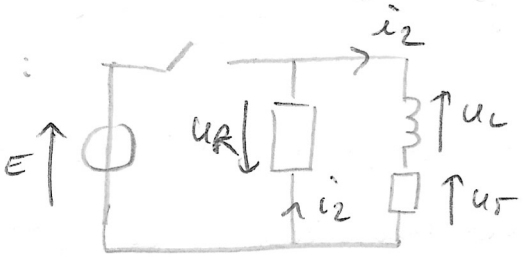
On pose $\tau_1 = \frac{L}{r}$. La solution de l'équation différentielle est de la forme : $i_2(t) = Ke^{-t/\tau} + \frac{E}{r}$

$i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$ (continuité du courant dans la bobine)

$\Rightarrow K + \frac{E}{r} = 0 \Rightarrow K = -\frac{E}{r}$ d'où $i_2(t) = \frac{E}{r}(1 - e^{-t/\tau_1})$

3- $t_0 \gg \tau_1 \Rightarrow e^{-t_0/\tau_1} \simeq 0$ d'où $i_2(t_0) \simeq \frac{E}{r}$

4- $t \gg t_0$:



$u_L + u_r + u_R = 0$

$(R + r) i_2 + L \frac{di_2}{dt} = 0$

$\frac{di_2}{dt} + \underbrace{\frac{R+r}{L}}_{\frac{1}{\tau_2}} i_2 = 0$

On pose $\tau_2 = \frac{L}{R+r}$. $i_2(t) = Ke^{-t/\tau_2}$

On $i_2(t_0) = \frac{E}{r}$, d'où $Ke^{-t_0/\tau_2} = \frac{E}{r} \Rightarrow K = \frac{E}{r} e^{t_0/\tau_2}$

D'où $i_2(t) = \frac{E}{r} e^{-(t-t_0)/\tau_2}$

5- $u_L(t) = L \frac{di_2}{dt} = \frac{LE}{r} \times \left(-\frac{1}{\tau_2}\right) e^{-(t-t_0)/\tau_2} = -E \frac{R+r}{r} e^{-(t-t_0)/\tau_2}$

$|u_L(t_0^+)| = E \frac{R+r}{r} = E\left(1 + \frac{R}{r}\right)$

Si $R \gg r$ alors $u_L(t_0^+) = E\frac{R}{r} \gg E$: on observe une forte tension aux bornes de L pendant une durée de l'ordre de τ_2.

Exercice 4

1- Lors de la charge du condensateur, la tension à ses bornes vérifie $u_c(t) = U_g(1 - e^{-t/\tau})$ avec $\tau = RC$ (voir cours)

On néglige le temps de décharge devant le temps de

charge - Pour que la lampe émette deux flashs par seconde, il faut que $u_c(\Delta t) = U_L$ avec $\Delta t = 0{,}5$ s.

d'où $U_g(1 - e^{-\Delta t/\tau}) = U_L \Leftrightarrow e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} = 1 - \frac{U_L}{U_g}$

$$-\frac{\Delta t}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{U_L}{U_g}\right) \text{ d'où } \Delta t = -RC \ln\left(1 - \frac{U_L}{U_g}\right)$$

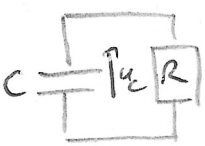
$$\boxed{R = \frac{-\Delta t}{C \ln\left(1 - \frac{U_L}{U_g}\right)}} \quad \text{A.N.} \quad \boxed{R = 2{,}4\ \text{M}\Omega}$$

2 En $\Delta t = 0{,}5$ s, la lampe reçoit l'énergie $W_{elec} = \frac{1}{2} C u_L^2$ de la part du condensateur - La puissance électrique moyenne reçue par la lampe est donc :

$$P = \frac{W_{elec}}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{P = 0{,}8\ \text{mW}}$$

Exercice 5

1- Le condensateur se décharge à travers le voltmètre - Le montage équivalent est :



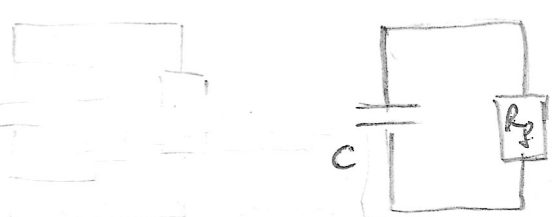
résistance du voltmètre

On a $u_c(t) = E e^{-t/\tau_1}$

avec $\tau_1 = RC$ - $u_c(\Delta t) = U_1 \Rightarrow E e^{-\Delta t/\tau_1} = U_1 = 2{,}3\text{V}$

d'où $-\frac{\Delta t}{\tau_1} = \ln\frac{U_1}{E} \Rightarrow R_1 = \frac{\Delta t}{C \ln\frac{E}{U_1}} \Rightarrow \boxed{R = 8{,}2\ \text{M}\Omega}$

2- Le montage est maintenant le suivant :



$\tau_2 = R_f C$

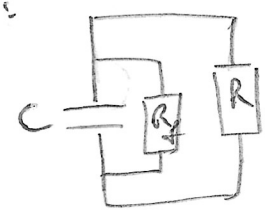
En raisonnant comme précédemment :

$R_f = \frac{\Delta t}{C \ln\frac{E}{U_2}}$ avec $U_2 = 7{,}9\text{V}$

D'où $\boxed{R_f = 51\ \text{M}\Omega}$

(on suppose que le branchement rapide du voltmètre ne perturbe pas le système)

Dans le 1er montage, on avait eu fait R et R_f en parallèle :



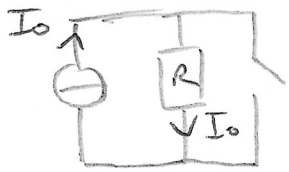
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_{eq}} - \frac{1}{R_f}$$

avec $R_{eq} = 8{,}2\ \text{M}\Omega$.

D'où $R = \dfrac{R_f \times R_{eq}}{R_f R_{eq}} = \dfrac{51 \times 8{,}2}{51 - 8{,}2}\ \text{M}\Omega \Rightarrow \underline{R = 9{,}8\ \text{M}\Omega}$

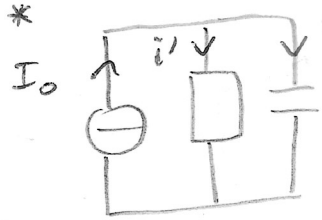
Exercice 6

1 - * $t \to \infty$: condensateur équivalent à un interrupteur ouvert



On en déduit $\underline{u_\infty = RI_0}$

*



$u = Ri' = R(I_0 - i)$ avec $i = C\dfrac{du}{dt}$

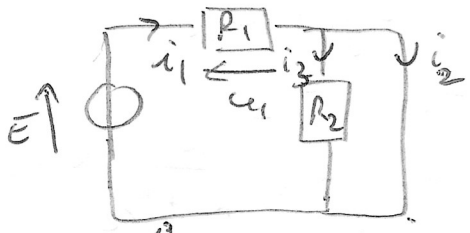
d'où $RC\dfrac{du}{dt} + u = RI_0$

$$\underline{\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{I_0}{C}} \qquad \underline{\tau = RC}$$

* $u(t) = Ke^{-t/\tau} + RI_0$. On $u(0^+) = u(0^-) = 0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur, initialement déchargé. $K + RI_0 = 0 \Rightarrow K = -RI_0$

$$\underline{u(t) = RI_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

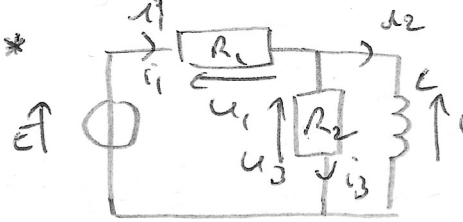
2 - * $t \to \infty$: bobine équivalent à un fil $\Rightarrow \underline{u_{2\infty} = 0}$



$i_3 = 0$ (R_2 court-circuitée)

et $\underline{u_{1\infty} = E}$

*



$i_1 = i_2 + i_3$ avec

$u_1 = R_1 i_1 \quad u_3 = R_2 i_3 \quad u_2 = L\dfrac{di_2}{dt}$

Loi de mailles : $E = u_1 + u_3 = R_1 i_1 + u_3$

$u_3 = u_2$

$$\frac{E-u_3}{R_1} = i_2 + \frac{u_3}{R} \iff \frac{E-u_2}{R_1} = i_2 + \frac{u_2}{R_2}$$

$$i_2 + u_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{E}{R_1}$$

dérivation ↓

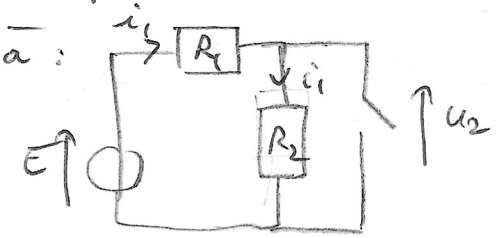
$$\frac{di_2}{dt} + \frac{du_2}{dt}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{L}u_2 + \frac{du_2}{dt}\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right) = 0 \iff \quad \times 1/\tau$$

$$\boxed{\frac{du_2}{dt} + \left(L\,\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right)u_2 = 0} \qquad \boxed{\tau = \frac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}}$$

* $u_2(t) = Ke^{-t/\tau}$ ⚠ u_2 n'est pas continue.

A $t=0^+$, le montage est équivalent à :



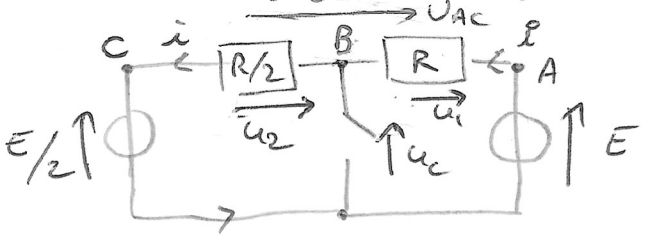
par continuité de i dans la bobine :

D'après le diviseur de tension :

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}E. \quad \text{On a déduit } K = \frac{R_2}{R_1+R_2}E$$

d'où $$\boxed{u_2(t) = \frac{R_2}{R_1+R_2}E\,e^{-t/\tau}}$$

3- * $t \to \infty$: le montage est équivalent à



Loi des mailles

$\Rightarrow E = E/2 + U_{AC}$

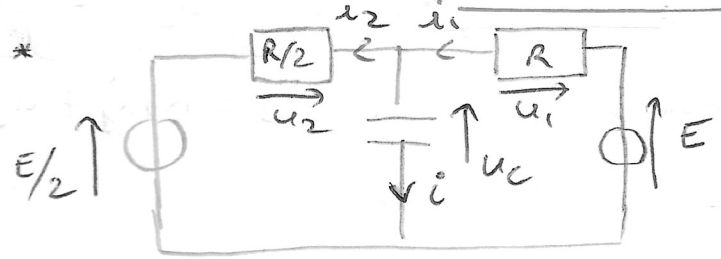
$\Rightarrow U_{AC} = E/2$

Diviseur de tension : $u_1 = U_{AB} = \frac{R}{R+R/2}U_{AC}$

$= \frac{E}{3}$

$$\boxed{u_{c\infty} + u_1 = E \Rightarrow u_{c\infty} = \frac{2E}{3}}$$

*



$i_1 = i + i_2$

$u_1 = Ri_1$; $u_2 = \frac{R}{2}i_2$; $i = C\frac{du_c}{dt}$

$\frac{E}{2} + u_2 = u_c$; $u_c + u_1 = E$

$$\frac{u_1}{R} = i + \frac{2u_2}{R} \quad \text{soit} \quad \frac{E-u_c}{R} = i + \frac{2u_c - E}{R}$$

$$\frac{3u_c}{R} + i = \frac{2E}{R} \quad \text{avec} \quad i = C\frac{du_c}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{3}{RC}u_c = \frac{2E}{RC}} \qquad \boxed{\tau = \frac{RC}{3}}$$

$1/\tau$

* $u_c(t) = Ke^{-t/\tau} + \frac{2}{3}E$ ($t=0^-$: condensateur chargé sous la tension E)

u_c continue : $u_c(0^+) = u_c(0^-) = E \Rightarrow K = \frac{E}{3}$

d'où $\boxed{u_c(t) = \frac{E}{3}\left(2 + e^{-t/\tau}\right)}$

Rq : $u_c(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{2E}{3}$: on retrouve bien la valeur u_∞ en régime permanent.