Devoir maison N°1 de Physique-Chimie

CORRIGÉ

Exercice 1 : Prismes accolés

1. Au point I_1, Snell Descartes s'écrit : $\boxed{n\sin(r) = N\sin(45^o) = \dfrac{N}{\sqrt{2}}}$. Au point I_3, on a : $\boxed{n\sin(\beta) = \sin(i)}$

2. En prolongeant les normales au dioptre, on obtient un triangle rectangle contenant les angles r et α. Or, on sait que la somme des angles dans un triangle fait $\pi \Rightarrow r + \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi$

$$\Rightarrow \boxed{r + \alpha = \frac{\pi}{2}}$$

Dans le triangle I_2I_3C, on a : $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \frac{\pi}{4} = \pi$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}}$$

3. A la limite de réfraction en I_2, on a $1 = n\sin(\alpha_\ell)$. Or, $\alpha_\ell = \frac{\pi}{2} - r_\ell$ d'après la question précédente, on vérifie alors :

$$1 = n\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - r_\ell\right) = n\cos(r_\ell)$$

Le phénomène de réfraction au points I_1 s'écrivait : $n\sin(r_\ell) = \dfrac{N}{\sqrt{2}}$

On utilise enfin la relation de trigonométrie $\cos^2(r_\ell) + \sin^2(r_\ell) = 1$, ce qui permet d'écrire successivement :

$$\frac{N^2}{2n^2} + \frac{1}{n^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{N^2 + 2}{2n^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad N^2 = 2(n^2 - 1)$$

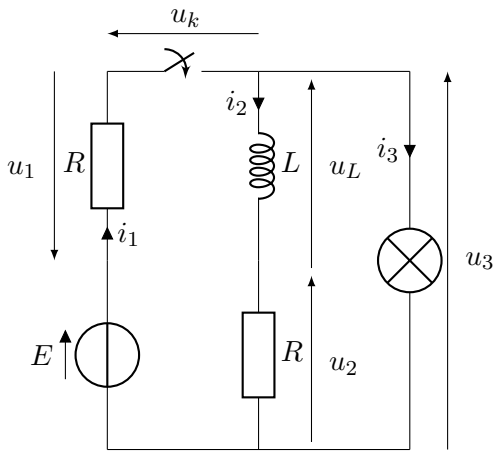
$$\text{Ainsi : } \boxed{N = \sqrt{2(n^2 - 1)}}$$

4. Il faut simplement faire les différentes applications numériques : $N = N_0 = 1,58$; $\alpha_\ell = 41,81^o$; $r_\ell = 48,19^o$; $\beta_\ell = 3,19^o$ et $i_\ell = 4,79^o$.

Pour qu'il y ait réflexion totale, il faut en I_2 que $\alpha > \alpha_\ell \Rightarrow r < r_\ell$ et donc d'après la question 1, on doit avoir $\boxed{N < N_0}$.

5. Si $i = 0$, on a $\beta = 0$ d'après Snell Descartes en I_3. La question 2 donne alors $\alpha = r = \frac{\pi}{4}$. On aboutit alors avec la relation de Snell Descartes en I_1 à $\boxed{N = n}$.

Exercice 2 : Lampe témoin



1. La date $t = 0^-$ constitue un premier régime permanent, la bobine se comporte alors comme un interrupteur fermé. La tension à ses bornes est donc nulle : $u_L(0^-) = 0$. L'interrupteur étant ouvert, on a d'autre part $i_1(0^-) = 0$. Une loi des noeuds permet ensuite d'écrire $i_1(0^-) = i_2(0^-)+i_3(0^-) = 0$ soit $i_2(0^-) = -i_3(0^-)$.

   Une loi des mailles dans la mailles de gauche permet d'écrire :

   $$u_2(0^-) + u_L(0^-) - u_3(0^-) = 0 \text{ soit } u_2(0^-) = u_3(0^-)$$

   Compte tenu de la loi d'Ohm aux bornes de la résistance R et de la lampe, on vérifie également :

   $$Ri_2(0^-) = 4Ri_3(0^-) \text{ soit } i_2(0^-) = 4i_3(0^-) \text{ ou encore } i_2(0^-) = -4i_2(0^-)$$
   $$\text{soit } 5i_2(0^-) = 0 \text{ et } i_2(0^-) = 0$$
   $$\text{d'où } i_3(0^-) = 0$$

   Appliquons enfin la loi d'additivité des tensions dans la maille de gauche du circuit, on vérifie :

   $$E - u_1(0^-) - u_k(0^-) - u_L(0^-) - u_2(0^-) = 0$$

   La valeur nulle des différentes tensions mentionnées précédemment permet finalement d'écrire $u_k(0^-) = E$.

2. L'interrupteur est maintenant fermé. On a alors $u_k(0^+) = 0$. Le courant étant une grandeur continue pour une bobine, on a d'autre part $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$. La tension u_2 dans la résistance R en série avec L est donc nulle compte tenu de la loi d'Ohm $u_2(0^+) = R \cdot i_2(0^+) = 0$.

   Une loi des noeuds permet d'écrire : $i_1(0^+) = i_2(0^+) + i_3(0^+)$ soit $i_1(0^+) = i_3(0^+)$.

   Appliquons la loi d'addivité des tensions en considérant la branche de gauche du circuit et celle de droite, on vérifie :

   $$E - u_1(0^+) - u_k(0^+) - u_3(0^+) = 0$$

   $$E - u_1(0^+) - u_3(0^+) = 0 \quad \text{soit} \quad E = u_1(0^+) + u_3(0^+)$$

   $$E = R \cdot i_1(0^+) + 4R \cdot i_3(0^+)$$

   $$E = 5R \cdot i_1(0^+) \text{ puisque } i_1(0^+) = i_3(0^+)$$

Finalement :

$$i_1(0^+) = i_3(0^+) = \frac{E}{5R}$$

Les tensions $u_1(0^+)$ et $u_3(0^+)$ se déterminent alors simplement en considérant la loi d'Ohm, ce qui donne :

$$u_1(0^+) = R \cdot i_1(0^+) = \tfrac{E}{5}$$

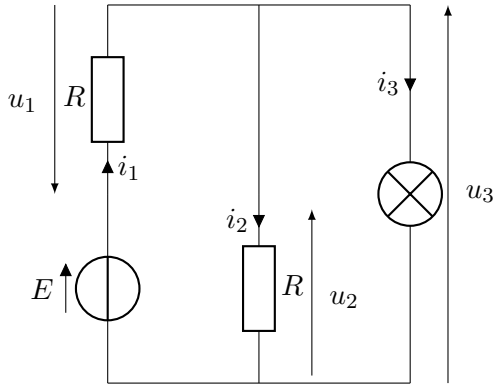
$$u_3(0^+) = 4R \cdot i_1(0^+) = \tfrac{4E}{5}$$

Il reste à déterminer la tension aux bornes de la bobine $u_L(0^+)$. On peut appliquer la loi d'addivité des tensions dans la maille de droite ce qui donne :

$$u_2(0^+) + u_L(0^+) - u_3(0^+) = 0$$

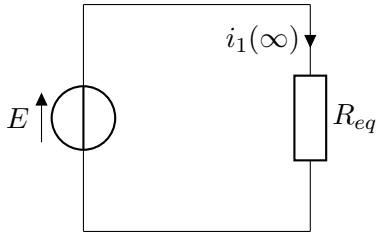
$$u_L(0^+) = u_3(0^+) = \tfrac{4E}{5}$$

3. Pour déterminer les grandeurs lorsque le nouveau régime permanent est atteint ($t \to \infty$), il est judicieux de dessiner le schéma équivalent, ce qui donne (l'interrupteur et la bobine se comporte comme un interrupteur fermé, c'est-à-dire une simple fil de connexion) :



Ce circuit est alors équivalent au circuit suivant avec une unique résistance équivalente R_{eq}.

Remarque : lorsque l'on veut déterminer l'expression du courant débité par le générateur, il est souvent utile de ramener le montage à une unique résistance équivalente.



Cette résistance équivalente s'obtient en considérant dans un premier temps l'association parallèle de la lampe (de résistance $4R$) avec la résistance R en série avec la bobine L. Soit R_1 la résistance équivalente de cette association en parallèle, on vérifie :

$$R_1 = \frac{R \times 4R}{R + 4R} = \frac{4R}{5}$$

Cette résistance R_1 est alors branchée en série avec la résistance R en sortie du générateur. La résistance équivalente R_{eq} s'obtient alors en somment R et R_1, ce qui donne :

$$R_{eq} = R + R_1 = R + \frac{4R}{5}$$

$$R_{eq} = R + R_1 = \frac{9R}{5}$$

On peut enfin déterminer le courant $i_1(\infty)$ débité par le générateur via la relation $E = \frac{9R}{5} \cdot i_1(\infty)$, soit :

$$i_1(\infty) = \frac{5E}{9R}$$

La tension $u_1(\infty)$ vaut alors : $u_1(\infty) = R \cdot i_1(\infty) = \dfrac{5E}{9}$
La loi d'addivité des tensions permet ensuite d'écrire :

$$E - u_1(\infty) - u_3(\infty) = 0$$

$$u_3(\infty) = E - u_1(\infty)$$

$$u_3(\infty) = \frac{4E}{9}$$

Cette tension $u_3(\infty)$ est également la tension $u_2(\infty)$ puisque les deux dipôles sont branchées en dérivation.

Pour terminer, les courants $i_2(\infty)$ et $i_3(\infty)$ peuvent se déterminer en considérant un pont diviseur de courant. On a alors successivement :

$$i_2(\infty) = \frac{4R}{R+4R} \cdot i_1(\infty) = \frac{4}{5} \cdot i_1(\infty)$$

$$i_2(\infty) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5E}{9R}$$

$$i_2(\infty) = \frac{4E}{9R}$$

$$i_3(\infty) = \frac{R}{R+4R} \cdot i_1(\infty) = \frac{1}{5} \cdot i_1(\infty)$$

$$i_3(\infty) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5E}{9R}$$

$$i_3(\infty) = \frac{E}{9R}$$

4. La synthèse de l'ensemble des résultats donne :

Grandeurs	i_1	i_2	i_3	u_1	u_2	u_3	u_L	u_k
$t = 0^-$	0	0	0	0	0	0	0	E
$t = 0^+$	$\frac{E}{5R}$	0	$\frac{E}{5R}$	$\frac{E}{5}$	0	$\frac{4E}{5}$	$\frac{4E}{5}$	0
$t \to \infty$	$\frac{5E}{9R}$	$\frac{4E}{9R}$	$\frac{E}{9R}$	$\frac{5E}{9}$	$\frac{4E}{9}$	$\frac{4E}{9}$	0	0

5. Écrivons la loi des noeuds puis les différentes lois des mailles pour ce circuit, on vérifie successivement :
   - $i_1 = i_2 + i_3 \quad (E_1)$
   - $E - u_1 - u_2 - u_L = 0$
     puis $E = u_1 + u_2 + u_L$ ou encore $E = R(i_1 + i_2) + L\dfrac{di_2}{dt} \quad (E_2)$

— $E - u_1 - u_3 = 0$ puis $E = u_1 + u_3$ ou encore $E = Ri_1 + 4Ri_3$ (E_3)

— $u_2 + u_L - u_3 = 0$ puis $u_2 + u_L = u_3$ ou encore $Ri_2 + L\dfrac{di_2}{dt} = 4Ri_3$ (E_4)

Partons de l'équation 4 (E_4) en écrivant que $i_2 = i_1 - i_3$ (E_1), il vient :

$$R(i_1 - i_3) + L\frac{d}{dt}(i_1 - i_3) = 4Ri_3 \quad (E_5)$$

D'autre part, l'équation 3, permet d'isoler la grandeur i_1 :

$$i_1 = \frac{E}{R} - 4i_3$$

En injectant cette expression de i_1 dans l'équation 5, on obtient une équation différentielle ne faisant apparaître que la grandeur i_3. On transforme alors l'expression afin d'obtenir une forme canonique (démarche non précisée ici), et on obtient bien :

$$\boxed{\frac{di_3}{dt} + \frac{9R}{5L}i_3 = \frac{E}{5L}}$$

6. En comparant avec la forme canonique connue, on peut par identification déterminer la constante de temps τ :

$$\tau = \frac{5L}{9R}$$

La solution particulère, c'est-à-dire l'expression de courant i_{3p} en régime permanent s'obtient en annulant la dérivée dans l'expression différentielle, ce qui permet d'obtenir :

$$i_{3p} = \frac{E}{9R}$$

La solution générale de $i_3(t)$ s'écrit alors :

$$i_3(t) = Ae^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)} + \frac{E}{9R}$$

En considérant la condition initiale $i_3(0^+) = \frac{E}{5R}$, il vient $A = \frac{4E}{45R}$:

$$\boxed{i_3(t) = \frac{E}{9R}\left(1 + \frac{4}{5}e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right)}$$

7. Pour la détermination de $i_1(t)$ on utilise l'équation $i_1 = \frac{E}{R} - 4i_3$ et l'expression de $i_3(t)$ déterminée précédemment. On obtient alors (démarche non précisée) :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{9R}\left(5 - \frac{16}{5}e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right)}$$

Enfin, pour l'expression de $i_2(t)$, on utilise l'expression $i_2(t) = i_1(t) - i_3(t)$:

$$\boxed{i_2(t) = \frac{4E}{9R}\left(1 - e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right)}$$

8. En régime permanent, la lampe est traversée par le courant $i_3(\infty) = \frac{E}{9R}$, valeur inférieure à celle de $\frac{E}{8R}$. En conséquence, la lampe ne présente pas d'éclairement en régime permanent !
9. Lorsque l'on ouvre à nouveau l'interrupteur, on isole la maille de gauche de la maille de droite, autrement dit la bobine et la lampe seront traversées par le même courant ! Le courant i_2 étant une grandeur continue pour une bobine, La valeur de ce courant vaudra, juste après l'ouverture de l'interrupteur, celle obtenue en régime permanent, c'est-à-dire $i_2(\infty) = \frac{4E}{9R}$! Cette valeur étant supérieure à $\frac{E}{8R}$, la lampe présentera bien un éclairement pendant un très bref instant.
10. La lampe permet donc de détecter, non pas si on ferme l'interrupteur, mais si on ouvre celui-ci !