Chapitre P7

Oscillateurs harmoniques

Compétences associées :

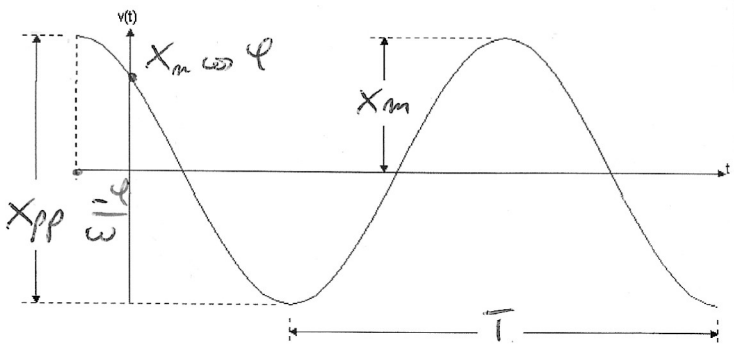
- Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales.
- Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- Réaliser un bilan énergétique

L'oscillateur harmonique est un modèle physique qui produit un **signal sinusoïdal** pour lequel l'amplitude est constante. Ce modèle décrit l'évolution de n'importe quel système physique au voisinage d'une position d'équilibre stable, ce qui en fait un outil transversal utilisé dans de nombreux domaines : mécanique, électricité et électronique, optique. Il néglige les forces dissipatives (frottement par exemple). Dans la pratique, pour que l'amplitude de l'oscillation reste constante, il faut entretenir les oscillations en fournissant de l'énergie.

I. Modèle de l'oscillateur harmonique

1. Signal sinusoïdal

Finalement, un **signal sinusoïdal** x(t) est un signal de la forme :
Il peut être représenté ainsi :



$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

X_m : amplitude

ω : pulsation

φ : phase à l'origine

X_{pp} : amplitude crête à crête (peak to peak)

- **Période**

On peut trouver l'expression de la période T_0 grâce aux propriétés des fonctions sinusoïdales

$\cos(\omega t) = \cos(\omega t + 2\pi) = \cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)$

↓ période du cosinus ; ↓ période temporelle : $T = \frac{2\pi}{\omega}$

- **Fréquence**

Nombre de répétitions du signal par seconde

1 motif $\leftrightarrow$ T

f motifs $\leftrightarrow$ 1 s

$\Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T}}$ (Hz, s) d'où $\boxed{\omega = 2\pi f}$ (rad.s^{-1}, Hz)

- **Phase initiale**

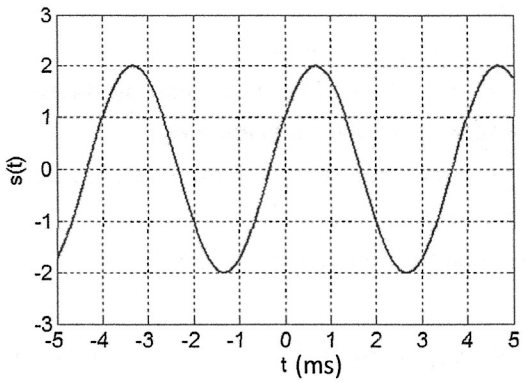
Elle dépend de l'origine des temps choisie et donne la valeur de départ du signal à t = 0. De plus, le cosinus étant une fonction périodique de période 2π, la phase initiale peut se ramener à l'intervalle entre $[-\pi, \pi]$.

Remarque : la phase instantanée est l'argument de la fonction cosinus.

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi$$

Application 1 **Caractéristiques d'un signal sinusoïdal**

1. Déterminer l'amplitude et la période du signal.
2. En déduire sa fréquence puis sa pulsation.
3. Déterminer la phase initiale de s(t).
   Justifier son signe.
4. Ecrire l'expression mathématique de s(t).



- **Autre expression du signal sinusoïdal**

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Déterminer les expressions de X_m et φ en fonction de A et B grâce à la relation $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$

$$x(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi) = X_m(\cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi)$$

$$x(t) = X_m\cos\varphi\cos(\omega t) - X_m\sin\varphi\sin(\omega t)$$

d'où $\begin{cases} A = X_m\cos\varphi \\ B = -X_m\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\dfrac{B}{A} \\ X_m^2\cos^2\varphi + X_m^2\sin^2\varphi = A^2 + B^2 \end{cases}$

$$X_m^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = A^2 + B^2$$

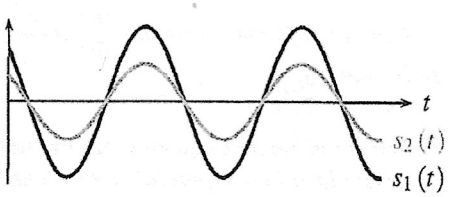
d'où $\boxed{X_m = \sqrt{A^2 + B^2}}$

- **Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux**

  - **Signaux en phase**

Ils s'annulent et ont leurs maxima et minima en même temps.

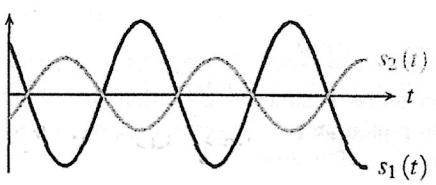
$$\varphi_2 = \varphi_1$$



  - **Signaux en opposition de phase**

Ils s'annulent en même temps, mais quand l'un est maximal, l'autre est minimal

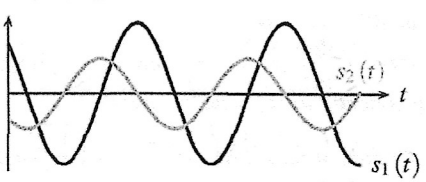
$$\varphi_2 = \varphi_1 \pm \pi$$



  - **Signaux en quadrature de phase**

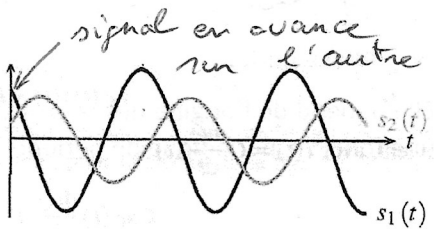
Lorsque l'un des signaux s'annule, l'autre est extrémal.

$$\varphi_2 = \varphi_1 \pm \pi/2$$



  - **Avance de signal par rapport à un autre**

Le signal en avance est celui qui est maximum en premier, càd pour une date plus faible



➢ **Signaux avec un déphasage quelconque**

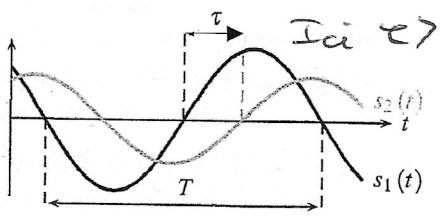
$s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$

$s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_1 + \Delta\varphi)$

$= S_2 \cos\left(\omega\left(t + \frac{\Delta\varphi}{\omega}\right) + \varphi_1\right)$

$= S_2 \cos(\omega(t - \tau) + \varphi_1)$ avec τ : retard de s_2 par rapport à s_1

d'où $\frac{\Delta\varphi}{\omega} = -\tau \Rightarrow \Delta\varphi = -\omega\tau$



$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -2\pi\frac{\tau}{T}$$

s_2 en retard par rapport à s_1 : $\Delta\varphi < 0$

s_2 en avance " " " " : $\Delta\varphi > 0$

2. Equation différentielle associée

Soit $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$ $\quad \ddot{x}(t) = -X_m \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 x(t) \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Résolution de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique

L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique s'écrit sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = K$$

- La solution de l'équation homogène (sans second membre) est :

$$x_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- La solution particulière correspond à la solution à l'équilibre (ou régime permanent), càd avec $\ddot{x} = 0$: $x_p = \frac{K}{\omega_0^2}$
- La solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière
- Pour calculer les constantes A et B, on utilise les conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ donnés par l'énoncé.

II. Un oscillateur harmonique mécanique

1. Loi de Hooke

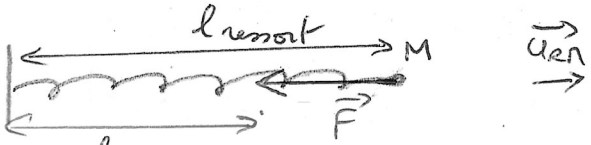
Soit un ressort (ou un élastique) de longueur à vide l_0. Dans le cas des faibles déformations, la force de rappel s'exprime par :

$$\vec{F} = -k(l_{ressort} - l_0)\vec{u}_{RM}$$

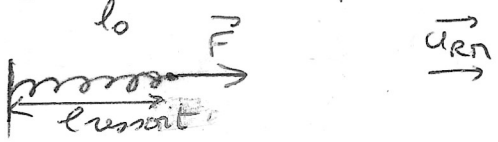
k : constante de raideur (N/m)

$\vec{u}_{RM}$: vecteur unitaire dirigé du ressort vers la masse

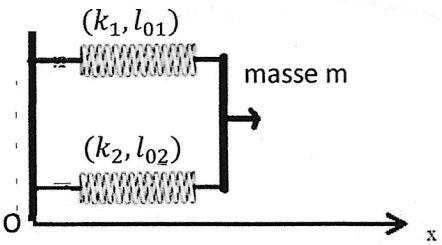
- Ressort en extension :



- Ressort en compression :



Application 2 **Ressorts en parallèle**

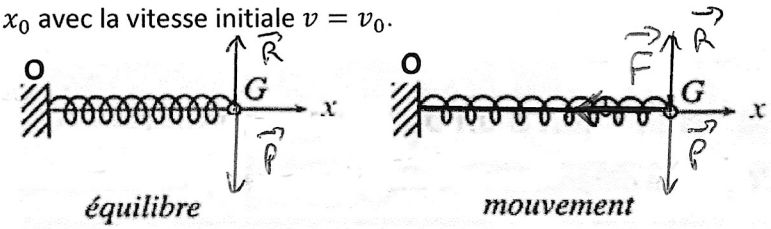


Soit deux ressorts de constante de raideur et longueur à vide (k_1, l_{01}) et (k_2, l_{0f}) sont attachés à un support et reliés en parallèle à une masse m

1. Exprimer les forces de rappel $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ lorsque la masse m est à l'abscisse x.
2. Exprimer $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ en fonction de x.
3. Quelle relation vérifie x_e, position d'équilibre de la masse m ?
4. En soustrayant les deux relations précédentes, montrer que $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ se met sous la forme $-k(x - l_0)\overrightarrow{e_x}$.
5. En déduire que le système des deux ressorts est équivalent à un seul dont on donnera la longueur à vide l_0 et la constante de raideur k.

2. Système et bilan de forces

Un mobile de masse m se déplace sans frottement le long d'une tige horizontale. Sa position est repérée par l'abscisse x(t) de son centre d'inertie G mesurée sur l'axe [Ox) matérialisé par la tige. A la date t = 0, le mobile est lâché à l'abscisse $x = x_0$ avec la vitesse initiale $v = v_0$.



- **Système :** mobile
- **Référentiel :** terrestre
- **Forces s'exerçant sur le système :**

Poids $\vec{P}$, Réaction de la tige $\vec{R}$, Force de rappel $\vec{F}$

3. Mise en équation et résolution

- **Application du principe fondamental de la dynamique**

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ soit $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{a}$

Projection sur $Ox \Rightarrow 0 + 0 - k(x - l_0) = m\ddot{x}$

$$m\ddot{x} + kx = k l_0$$

- **Solution de l'équation différentielle**

On met l'équation différentielle sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}l_0 \quad \text{d'où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Solution générale : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + l_0$

$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

Conditions initiales : $x(0) = x_0 \Rightarrow A + l_0 = x_0 \Rightarrow A = x_0 - l_0$

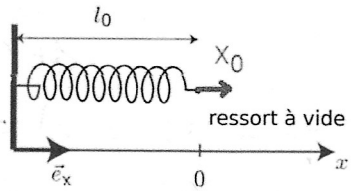
$\dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow B\omega_0 = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_0}$

d'où $x(t) = (x_0 - l_0)\cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + l_0$

Amplitude du mouvement : $X_m = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(x_0 - l_0)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$

Application 3 **Autre paramétrage**

Mettre en équation le système masse-ressort dans le cas où l'origine des positions O est située à la position d'équilibre. Qu'est-ce que cela change ?



Application 4 **Diapason**

Un diapason vibre à la fréquence du La4 soit f = 440 Hz. On mesure sur une photographie l'amplitude du mouvement de l'extrémité des branches : A = 0, 5 mm.

1. Quelle est la vitesse maximale de l'extrémité du diapason ?
2. Quelle est l'accélération maximale de ce point ?

4. Etude énergétique

On montre (voir cours sur l'énergie en mécanique) que **l'énergie potentielle stockée dans un ressort** est :

$$E_{p,\text{élastique}} = \frac{1}{2} k (\ell_{ressort} - \ell_0)^2$$

$$\ell_{ressort} = x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \ell_0 \Rightarrow E_{p,\text{élast.}} = \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

L'énergie cinétique du système masse-ressort est :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{avec} \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = -X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{d'où } E_c = \frac{1}{2} m X_m^2 \underbrace{\omega_0^2}_{k/m} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

On en déduit que l'énergie mécanique du système est :

$$E_m = E_c + E_{p\,élast} = \frac{1}{2} k X_m^2 \left(\underbrace{\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}_{=1} \right)$$

$$E_m = \frac{1}{2} k X_m^2 = \frac{1}{2} k (x_0 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2} k \frac{v_0^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{2} k (x_0 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2} m v_0^2$$

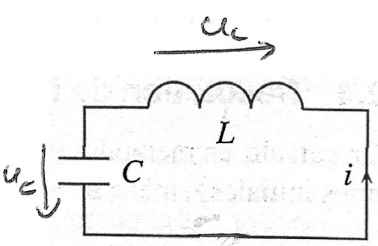
$$= E_{c0} + E_{p,\text{élast},0}$$

L'énergie mécanique du système se conserve

III. Un oscillateur harmonique électrique

1. Système étudié

Le circuit étudié comporte une bobine d'inductance L en série avec un condensateur de capacité C. Le condensateur est initialement chargé, c'est-à-dire qu'un dispositif extérieur, non représenté, y a accumulé des charges ; il présente donc une tension non nulle. On ferme l'interrupteur à la date t = 0. Pour t > 0, le condensateur se décharge dans la bobine, ce qui crée un courant i(t).



2. Mise en équation et résolution

D'après la loi des mailles : $u_C + u_L = 0$

$$u_C + L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$u_C + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = 0 \qquad \text{On pose } \omega_0^2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Rightarrow u_c(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

$$\begin{cases} \frac{du_c(t)}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

or $u_c(0) = E \Rightarrow A + 0 = E \Rightarrow A = E$ (continuité de u_c)

$\frac{du_c(0)}{dt} = \frac{i(0)}{C} = 0 \Rightarrow 0 + B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$ (continuité de $i_L = i$)

$$u_c(t) = E\cos(\omega_0 t)$$

3. Etude énergétique

L'énergie électrique stockée dans le condensateur est : $\boxed{W_{elec} = \frac{1}{2} C u_c^2}$

$$W_{elec} = \frac{1}{2} C E^2 \cos^2(\omega_0 t)$$

L'énergie magnétique stockée dans la bobine est : $\boxed{W_{mag} = \frac{1}{2} L i^2}$

$$W_{mag} = \frac{1}{2} L \left(C \frac{du_c}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} LC^2 \left(-E\omega_0 \sin(\omega_0 t)\right)^2 = \frac{1}{2} LC^2 E^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ d'où $W_{mag} = \frac{1}{2} CE^2 \sin^2(\omega_0 t)$

L'énergie totale du système est :

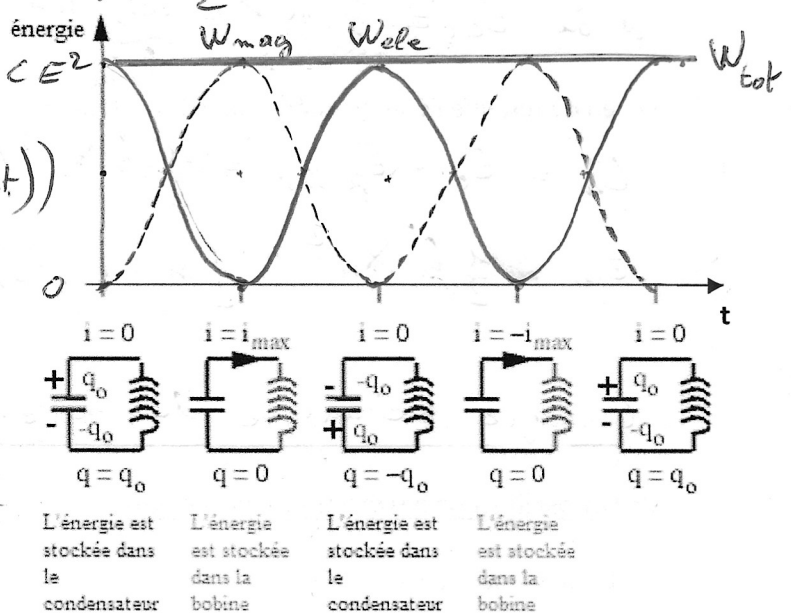
$$W_{tot} = W_{elec} + W_{mag}$$

$$W_{tot} = \frac{1}{2} CE^2 \left(\underbrace{\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)}_{=1}\right)$$

$$W_{tot} = \frac{1}{2} CE^2$$

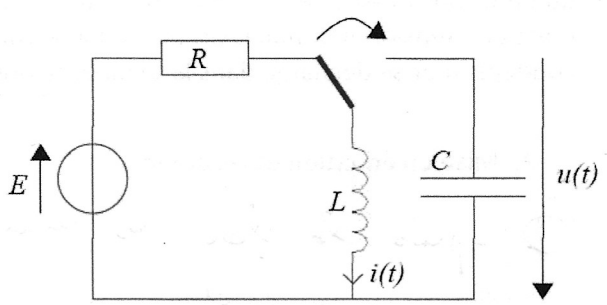
$$= W_{elec,0} + \underbrace{W_{mag,0}}_{0}$$

L'énergie totale du système se conserve au cours du temps.



Application 5 **Courant dans un circuit LC**

On considère le circuit ci-contre, qui est dans cet état depuis longtemps. A t = 0, on bascule l'interrupteur.



1. Déterminer $i(0^-)$ et $u(0^-)$.
   En déduire $i(0^+)$ et $u(0^+)$.
2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par i(t). On pourra pour cela dériver une relation obtenue grâce à une des lois fondamentales de l'électricité.
   Montrer rapidement que l'équation vérifiée par u(t) est du même type.
3. Résoudre l'équation sur i(t) et représenter l'allure de i(t).