

Circuits d'ordre 1

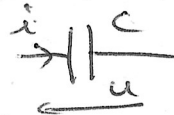
Compétences associées :

- Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.
- Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine.
- Etablir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.
- Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension.
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
- Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques (TP)
- Capacité numérique : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.
- Réaliser un bilan énergétique.

1. Condensateur

• Présentation du composant

Un condensateur est constitué de deux plaques métalliques conductrices séparées par un isolant. S'il est soumis à une tension électrique, il peut accumuler des charges électriques sur ses armatures.



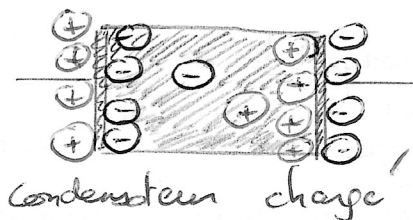
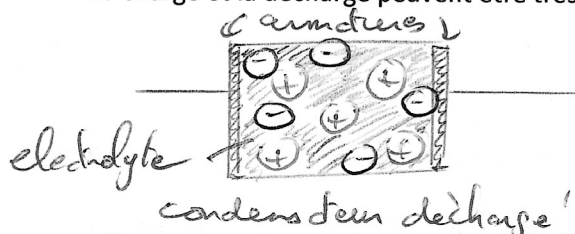
• Capacité du condensateur

La capacité du condensateur représente son aptitude à accumuler des charges électriques sous une tension donnée. Elle dépend de sa géométrie et de la nature de l'isolant.

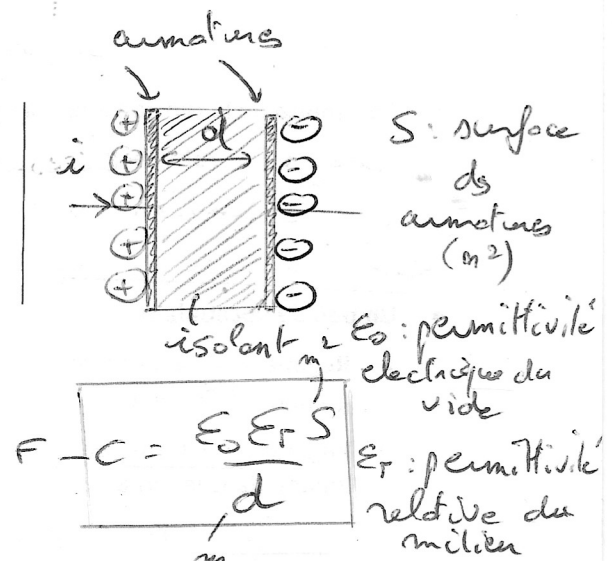
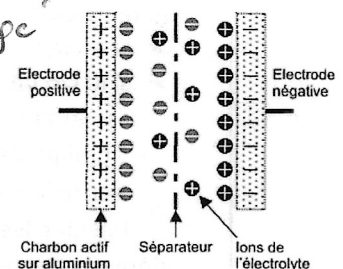
• Condensateur électrolytique - Supercondensateur

L'isolant est remplacé par une solution électrolytique qui contient des ions mobiles. Lorsque les plaques se chargent, les ions sont attirés par l'armature de charge opposée. Ils en sont séparés par une mince couche de solvant, formant un nouveau condensateur à chaque armature.

La charge et la décharge peuvent être très rapides et on peut effectuer des millions de cycles.



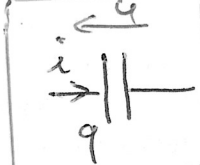
Le supercondensateur est constitué de deux électrodes poreuses, souvent en charbon actif et imprégnées d'électrolyte, séparées par une membrane isolante et poreuse. La surface de contact entre électrode et électrolyte est très importante, ce qui permet d'obtenir des valeurs de capacité très élevées, et donc de stocker plus d'énergie.



- Variétés de condensateur

Type	Capacité	Exemples d'usage
céramique	1 pF → 100 μF	électronique
film polymère	1 nF → 1 μF	filtrage et mise en forme de signaux
oxyde de tantale	100 nF → 1 mF	télécommunication mobile
oxyde d'aluminium	10 μF → 1 F	électronique
supercondensateur	10 F → 10 kF	véhicules : stockage d'énergie de freinage

- Relations du condensateur

$$q = C u \quad i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$


- Energie emmagasinée par un condensateur

Entre les armatures d'un condensateur chargé règne un champ électrique uniforme (loin des bords).
Il emmagasine une énergie de type électrostatique, localisée entre les armatures.

Puissance reçue par le condensateur : $P_c = u i = u C \frac{du}{dt}$

Energie stockée : $W_{\text{elec}} = \int P_c dt = \int u C \frac{du}{dt} dt = C \int u du = \frac{1}{2} C u^2$

$$W_{\text{elec}} = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{q^2}{2C}$$

- Continuité de la tension aux bornes du condensateur

L'énergie est nécessairement une fonction continue du temps, donc la tension aux bornes du condensateur est une fonction continue du temps. L'intensité peut être discontinue dans la branche du condensateur.

- Un peu de vocabulaire

- **Régime permanent** : régime pour lequel le circuit électrique adopte un comportement similaire à la grandeur à l'origine de son excitation.
- **Régime transitoire** : évolution temporaire d'un circuit entre deux régimes permanents, dont la durée est limitée dans le temps.
- **Réponse libre d'un circuit** : évolution temporelle d'un circuit qui n'est soumis à aucune excitation (pas de source de tension).
- **Echelon de tension** : situation pour laquelle avant l'instant initial, la tension aux bornes du générateur est nulle. A l'instant initial ($t = 0$), la tension passe brusquement à une valeur $E \neq 0$.

- Méthodes

Trouver l'équation différentielle :

- flécher les courants sur le circuit ;
- représenter la tension aux bornes des différents dipôles en respectant les conventions (récepteur ou générateur) ;
- si le circuit possède une seule maille, appliquer la loi des mailles et les lois caractéristiques des dipôles ;
- si le circuit possède plusieurs mailles, une méthode infaillible consiste à (dans l'ordre) :
 - commencer par la loi des nœuds ;
 - appliquer ensuite les lois caractéristiques des dipôles ;
 - écrire la loi des mailles
 - injecter les expressions des différentes intensités dans la loi des nœuds (avant cela, il faut parfois dériver cette loi) ;

Résoudre l'équation différentielle :

Soit l'équation différentielle : $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \alpha$, avec $\alpha = \text{constante}$
 Sa solution générale est la somme de :

- la solution homogène de l'équation différentielle sans second membre : $u_h(t) = K e^{-t/\tau}$ avec $K = \text{constante}$
- la solution particulière correspondant à la solution en régime permanent ($\frac{du}{dt} = 0$) : $u_p = \alpha \tau$.

On a donc $u(t) = K e^{-t/\tau} + \alpha \tau$

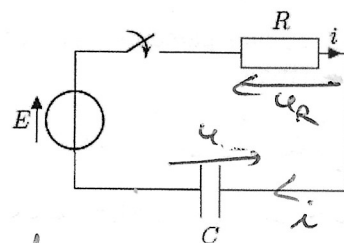
K se détermine à partir de la condition initiale : $u(0)$

Faire un bilan de puissance et d'énergie :

- appliquer la loi des mailles au circuit ;
- multiplier l'équation obtenue par l'intensité i du courant dans le circuit ;
- identifier chaque terme de la relation obtenue en termes de puissance reçue (convention récepteur) ou fournie (convention générateur) ;
- intégrer par rapport aux temps pour obtenir un bilan énergétique.

• Réponse à l'échelon de tension du RC

Le condensateur est initialement déchargé ($u(0) = 0$). A l'instant initial, on ferme un interrupteur qui le sépare du générateur. La charge est considérée comme terminée au bout d'une durée de quelques τ .



* Loi des mailles : $E = u_R + u$

$$= Ri + u = RC \frac{du}{dt} + u$$

* Equation différentielle : $\frac{du}{dt} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}$

On pose $\tau = RC$ constante des temps du circuit RC

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

* Résolution de l'équation différentielle :

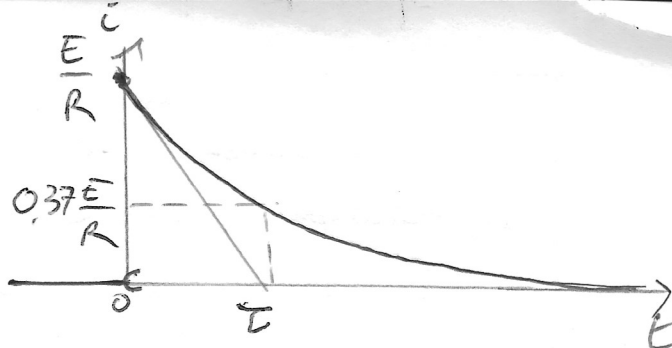
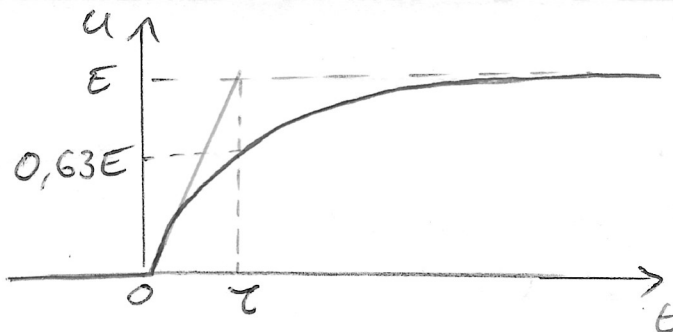
$u = K e^{-t/\tau} + E$. Or $u(0^+) = u(0^-)$ (continuité de la tension aux bornes de C)

$K + E = 0$ (condensateur initialement déchargé)

d'où $K = -E \Rightarrow u = E(1 - e^{-t/\tau})$

et $i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d}{dt} (E - E e^{-t/\tau}) = -CE \times (-\frac{1}{\tau}) e^{-t/\tau} = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$
 $i(t)$ discontinue

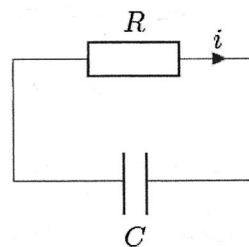
* Bilan de puissance : $Ei = Ri^2 + ui = Ri^2 + Cu \frac{du}{dt} = Ri^2 + \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} Cu^2)$
 $\Rightarrow P_{\text{générateur}} = P_{\text{joule}} + \frac{d}{dt} (W_{\text{elec}})$



Application 1 Régime libre du circuit RC

Le condensateur est initialement chargé sous une tension U_0 . A l'instant initial, on ferme un interrupteur qui le sépare de la résistance.

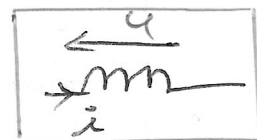
Mettre en œuvre la méthode vue dans le paragraphe précédent.



2. Bobine

Solénoïde

C'est un enroulement de fil électrique autour d'un cylindre creux ou contenant un milieu magnétique. Quand le solénoïde est parcouru par un courant électrique, un champ magnétique est créé en son sein. Si le courant est variable, une tension apparaît aux bornes de la bobine.



Relation courant-tension de la bobine (convention récepteur)

$$u = L \frac{di}{dt}$$

L : inductance de la bobine en Henry (H)

Energie emmagasinée par la bobine

La bobine parcourue par un courant électrique stocke au sein de l'enroulement de l'énergie sous forme magnétique.

Puissance reçue par la bobine : $P = ui = L \frac{di}{dt} i$

Energie stockée : $W_{\text{mag}} = \int P dt = \int L \frac{di}{dt} i dt = L \int di i$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L i^2$$

Continuité du courant dans la bobine

L'énergie stockée dans une bobine est continue, donc le courant traversant une bobine est continu. La tension aux bornes d'une bobine peut être discontinue.

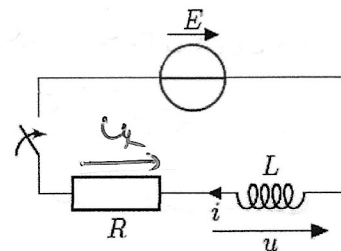
Effet d'une bobine dans un circuit électrique

La présence d'une bobine retarde l'établissement du courant électrique dans un circuit. Typiquement elle provoque un retard à l'allumage et un retard à l'extinction.

Réponse à l'échelon de tension du RL

La bobine n'est initialement traversée par aucun courant ($i(0) = 0$).

A l'instant initial, on ferme un interrupteur qui la sépare du générateur.



$$E = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}$$

On pose $\tau = \frac{L}{R}$ d'où $i(t) = K e^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$

$i(0^+) = i(0^-)$ (continuité de i dans la bobine) d'où $i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$

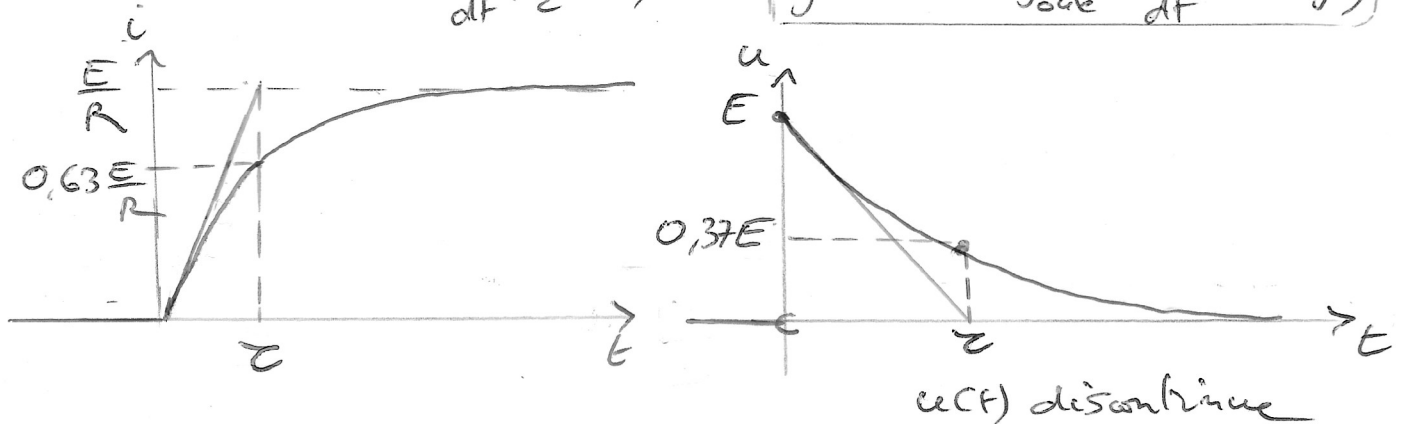
$K + \frac{E}{R} = 0 \Rightarrow K = -\frac{E}{R}$

* τ : constante de temps du circuit RL

$$u = L \frac{di}{dt} = \frac{L E}{R} \frac{d}{dt} (1 - e^{-t/\tau}) = \frac{L E}{R} \times \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} = E e^{-t/\tau}$$

Bilan de puissance : $E i = u_R i + u_L i = R i^2 + i \times L \frac{di}{dt}$

$$E i = R i^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 \right) \rightarrow \boxed{P_{\text{général}} = P_{\text{Joule}} + \frac{d}{dt} (W_{\text{mag}})}$$



3. Circuits à deux mailles

• Méthodes

Trouver la condition initiale :

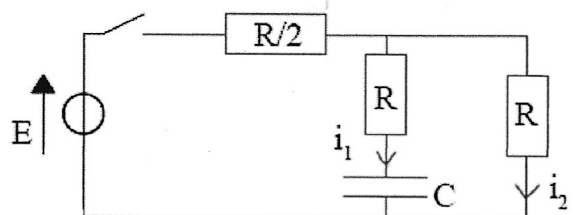
- commencer par déterminer u_c ou i_L à $t = 0^-$.
- Pour cela, écrire les choses évidentes (interrupteur ouvert donc courant nul, condensateur chargé ou déchargé...), et utiliser le régime permanent (donc $i_c(0^-) = 0$ et $u_L(0^-) = 0$);
- utiliser la continuité du courant dans une bobine ou de la tension aux bornes d'un condensateur;
- appliquer enfin la loi des noeuds ou la loi des mailles pour en déduire les grandeurs recherchées.

Déterminer le régime permanent :

- dessiner le schéma électrique équivalent en remplaçant les bobines par des fils et les condensateurs par des interrupteurs ouverts;
- appliquer la loi des mailles et/ou la loi des noeuds.

Application 2 Circuit RC avec deux mailles

Soit le circuit suivant. L'interrupteur est ouvert depuis longtemps; à $t = 0$, on le ferme.



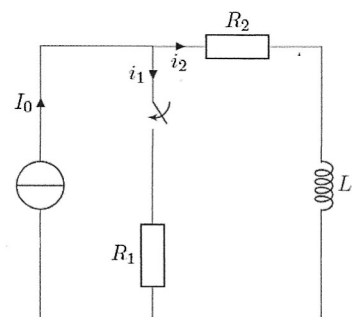
1. Déterminer les valeurs de i_1 et i_2 à $t = 0^+$ et quand $t \rightarrow \infty$.
2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$, la tension aux bornes de C , s'écrit :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E'}{\tau} \text{ avec } E' = \frac{2}{3}E \text{ et } \tau = \frac{4}{3}RC.$$

3. La résoudre.
4. En déduire $i_1(t)$ et vérifier la cohérence avec les résultats précédents.

Application 3 Circuit RL avec deux mailles

Soit le circuit ci-contre. L'interrupteur est ouvert depuis longtemps, on le ferme à $t = 0$. On appelle u_L la tension aux bornes de la bobine.



1. Déterminer i_2 et u_L à $t = 0^+$, et quand $t \rightarrow \infty$.
2. En appliquant la méthode vue précédemment, déterminer l'équation différentielle vérifiée par i_2 .
3. La résoudre et vérifier la cohérence avec les résultats précédents