Logique formelle

Exercice 1 (Quantificateurs) : Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1 Traduire les assertions suivantes dans le langage mathématique (avec quantificateurs) et les démontrer :

① L'ensemble des entiers naturels n'a pas de maximum.

② La fonction $f :]1\,;+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, est minorée.

③ Entre deux rationnels distincts il y a au moins un troisième rationnel.

2 Traduire les assertions suivantes en langage courant, dire si elles sont vraies ou fausses (le justifier). Dans le cas d'une assertion fausse, on écrira sa négation avant de la justifier :

① $\forall x \in [-1\,;1],\ \exists\,!y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right],\ \sin(y) = x$.

② $\exists\,\mathrm{M} \in [0\,;2[,\ \forall x \in [0\,;2[,\ x \leqslant \mathrm{M}$.

Exercice 2 (Types de raisonnements) : Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

Aide: On pensera aux ensembles de définition.

① $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x-1} < \dfrac{1}{4x^2}$.

② $2x - \sqrt{x} - 1 \leqslant 0$.

2 ① Soient A, B et C trois ensembles, démontrer l'implication :

$$\begin{cases} \mathrm{A}\cup\mathrm{B} = \mathrm{A}\cup\mathrm{C} \\ \mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \mathrm{A}\cap\mathrm{C} \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{B} = \mathrm{C}.$$

② Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction affine, et d'une fonction s'annulant en -1 et 1.

③ Montrer par une récurrence forte, que pour tout naturel n non nul, il existe deux naturels p et q tels que $n = 2^p \times (2q+1)$.