Logique et Raisonnement

Exercice 1 : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leqslant 1$.
2. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leqslant 0$.
3. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

Exercice 2 : Écrire la négation des assertions suivantes où $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{S}$ sont des propositions.

1. $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$,
2. P et non Q,
3. P ou (Q et R),
4. (P et Q) $\Rightarrow$ (R $\Rightarrow$ S).

Exercice 3 : Montrer, par contraposition, l'assertion suivante, E étant un ensemble :

$$\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{E}) \quad (\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \Rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B}.$$

Exercice 4 : Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\mathrm{S}_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + (n-1) \times n.$$

Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \dfrac{1}{3} n(n-1)(n+1)$.

Exercice 5 : Dans $\mathbb{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Leftrightarrow y = y'.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 6 : On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x-2}$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Déterminer l'ensemble image A de f.
3. Entre quels ensembles peut-on restreindre et corestreindre f pour qu'elle établisse une bijection ?